概率论与数理统计笔记

Guotao He

Build: 2025-03-06

Typst Version: 0.13.0

"All knowledge degenerates into probability."

— David Hume

目录

Chapter 1 概率论的基本概念

1.1 基本概念

样本空间与样本点 对于一个随机的试验 E，其实验的所有可能的结构构成一个集合，此集合称为随机实验 E 的**样本空间**，记为 S，样本空间的每一个元素被称为一个**样本点**。

随机事件 随机试验 E 的样本空间 S 的子集 A 被称为 E 的一个**随机事件**。特别的，由一个样本点组成的单点集，称为 **基本事件**，样本空间 S 是自身的子集，且每次实验中必然发生，称 S 为 E 的**必然事件**，空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点，也为样本空间 S 的子集，其在每次实验中必然不发生，$\varnothing$ 称为 E 的**不可能事件**。

事件空间 在随机试验 E 中的所有随机事件构成一个集合 $\mathscr{F}$（集合的每一个元素也是集合），此集合被称为**事件空间**

事件本质上是样本空间的一个子集，因此事件之间的运算自然按集合论中集合之间的运算处理。具体而言，有：

1. $A \subseteq B$ 表示事件 B 包含事件 A，若 A 发生则 B 一定也发生
2. $A = B$ 表示 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$
3. $A + B = A \cup B = \{x|x \in A \text{ or } x \in B\}$
4. $AB = A \cap B = \{x|x \in A \text{ and } x \in B\}$
5. $A - B = \{x|x \in A \text{ and } x \notin B\}$
6. $A \cap B = \varnothing$，称 A 与 B **互斥**
7. $A \cup B = S, A \cap B = \varnothing$，称 A 与 B 互为**逆事件**，互为**对立事件**
8. 记 A 的对立事件为 $\bar{A} = S - A$

De Morgan 律（对偶率） $\overline{A+B} = \bar{A}\bar{B}$, $\overline{AB} = \bar{A} + \bar{B}$

上述定律可推广到 n 个事件：

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}, \quad \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$$

Definition 1.1.1 (概率): 设随机试验 E 的样本空间为 S，$\mathscr{F}$ 为 S 的某些子集组成的一个事件空间，如果对任一事件 $A \in \mathscr{F}$，定义在 F 上的一个实值函数 $P(A)$ 满足如下性质：

1. **非负性**：$\forall A \in \mathscr{F}, P(A) \geq 0$
2. **规范性（归一性）**：$P(S) = 1$
3. **可列可加性**：$\forall A_1, A_2, ... \in \mathscr{F}$, 且满足 $A_iA_j = \varnothing, i \neq j, i, j \in \mathbb{R}$，有：

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$$

则我们称 P 是 $\mathscr{F}$ 上的**概率测度**，称 $P(A)$ 是 A 的**概率**。

Remark: 这里的“可列可加”实际上是由测度论带来的，这里的“可列”要求事件序列 A_i 是无穷长的，且是可数无穷。

当只有有限个事件序列时（比如只有 n 个）我们只需要简单地将 $A_i(i>n)$ 全部定义为空集即可,换句话说，对于有限个互不相容的事件序列 $A_1,...,A_n$，有：

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$$

实际上，上述性质被称为“有限可加性”，而“可列可加性”是其到无穷情况的推广，“可列可加性”可以推出“有限可加性”，但“有限可加性”不能推导得到“可列可加性”。因此，我们不可用“有限可加性”去替代“可列可加性”，即使我们大多数情况下只处理有限的情况。

换句话说，所谓概率，就是一个从事件空间 $\mathscr{F}$ 到 $\mathbb{R}$ 上的一个映射，且满足上面三个条件。实际上，概率的公理化条件并不直接告诉我们在实际问题中如何计算 $P(A)$，其只告诉了我们什么是 $P(A)$（实际上很多数学上的公理化定义都如此），$P(A)$ 的具体计算要根据问题的条件和背景得到。

Mark: 对于不可列的样本空间，需要注意其中的可列个点集的概率可以[1]为 0.

概率空间 所谓概率空间是一个三元组，包含样本空间 S，事件集合 $\mathscr{F}$ 和概率测度 P, 记为 $(S,\mathscr{F},P)$

1.2 概率公式的基本计算

Theorem 1.2.1 (加法公式（Jordan 公式）): 对于概率空间 $(S,\mathscr{F},P)$ 若 $A_1,...,A_n\in\mathscr{F}$，则：

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{1\le i_1<...<i_n\le n}P\left(A_{i_1}...A_{i_k}\right)$$

[1]一般而言不可列样本空间中可列点集的概率测度一般都为 0，但测度论中确实有其他情况使得可列点集的概率测度不为 0.

Theorem 1.2.2 (减法公式)：对于概率空间 $(S, \mathscr{F}, P)$，若 $A, B \in \mathscr{F}$，则：

$$P(A - B) = P(A) - P(AB)$$

Theorem 1.2.3 (乘法公式)：对于概率空间 $(S, \mathscr{F}, P)$，若 $A_1, ..., A_n \in \mathscr{F}$，则：

$$P(A_1 ... A_n) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i | A_1 ... A_{i-1}) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i_1 < \cdots < i_k} (-1)^{k-1} P\left(A_{i_1} \cup ... \cup A_{i_k}\right)$$

Theorem 1.2.4 (全概率公式)：对于概率空间 $(S, \mathscr{F}, P)$，若 $B, A_1, ..., A_n \in \mathscr{F}$，其中 A_i 是 S 的分割（又称完备事件群，英文为 Partition），则：

$$P(B) = \sum_{j} P(A_j) P(B | A_j)$$

Theorem 1.2.5 (Bayes 公式)：对于概率空间 $(S, \mathscr{F}, P)$，若 $B, A_1, ..., A_n \in \mathscr{F}$，其中 A_i 是 S 的分割，则：

$$P(A_i | B) = \frac{P(A_i) P(B | A_i)}{\sum_j P(A_j) P(B | A_j)}$$

1.3　条件概率和独立性

Definition 1.3.1 (条件概率)：设 A, B 是两个事件，且 $P(A) > 0$，称：

$$P(B | A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

为事件 A 发生的条件下事件 B 发生的**条件概率**。

条件概率具有如下性质：给定事件 A 发生，$P(A) > 0$：

- $0 \le P(B | A) \le 1$
- $0 \le P(S | A) = 1$
- 若 $B_1 B_2 = \varnothing$，则 $P(B_1 + B_2 | A) = P(B_1 | A) + P(B_2 | A)$

独立性 对于试验 E 中的两个事件 A, B，若事件 A 发生的概率对事件 B 发生的概率无影响，即 $P(AB) = P(A)P(B)$，则我们称事件 A 与 B 互相**独立**。 更一般地，若 $P(A_1A_2...A_n) = P(A_1)P(A_2)...P(A_n)$ 则我们称 $A_1, A_2, ..., A_n$ 相互独立。

Mark: 注意一般而言 $A_1, ..., A_n$ **两两独立**和**相互独立**并不相同. 具体而言，两两独立指的是从 $A_1, ..., A_n$ 中任取两个，均有 $P(A_iA_j) = P(A_i)P(A_j)$. 而相互独立指的是 $P(A_1...A_n) = P(A_i)...P(A_n)$. 相互独立一定两两独立，但两两独立不一定相互独立.

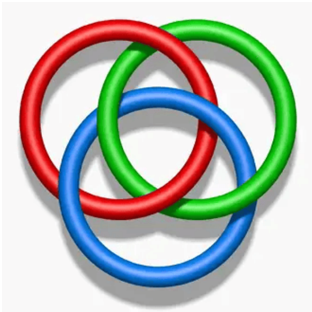

图 1.3-1 Borronmean Ring,
任意两个环两两不相交，但整体无法解开

Mark: 这里需要区分 A, B 独立和 A, B 对立的区别。实际上，事件 A, B 的独立性和对立性不可能同时成立，若已知 A, B 对立，且 A 不成立，则我们可以马上得到 B 成立，显然这不符合 A, B 互相独立的定义.

另外，A, B 对立很容易在 Venn 图中表示，但 A, B 独立不然，究其原因是因为 Venn 图并无体现数量关系，故无法表示 A, B 独立这一数量关系.

1.4 古典概率模型

古典概型 若试验 E 满足两个条件：1. 样本空间 S 是有限的集合。2. S 中的每个样本点发生的可能性相同。则我们称这种试验为**等可能概型**，又称**古典概型**。

在古典概型中，取样本空间 $S = \{e_1, ..., e_n\}$，其中 $e_1, ..., e_n$ 代表该随机试验的 N 个结果，事件域 $\mathscr{F}$ 取为 2^S（即 S 的所有子集都是事件），且每个基本事件发生的可能性相同，即

$$P(\{e_1\}) = P(\{e_2\}) = ... = P(\{e_n\})$$

若事件 A 包含 K 个基本事件，即 $A = \left\{e_{i_1}\right\} \cup ... \cup \left\{e_{i_n}\right\}$，则给出概率测度 P 如下：

$$P(A) = \frac{K}{N} = \sum_{e \in A} \frac{1}{N}$$

由于古典概型的概率与计数直接相关，因此下文中简要介绍一些基本的组合计数方法：

乘法原理 设某个试验共包含 r 个依次执行的阶段，其中：1. 第一个阶段总共有 n_1 个可能的结果。2. 在完全前面的 $i-1$ 个阶段并得到一个相应的结果后，第 i 个阶段将总共有 n_i 个可能的结果。则该试验一共有 $n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_r$ 个可能的结果。

加法原理 设完成某个试验有 r 种不同的途径，且只能在这 r 种途径中选一种来完成该试验。若采取第 i 种途径时总共有 n_i 种可能的结果，则该试验一共有 $n_1 + n_2 + ... + n_r$ 种可能的结果。

排列 假设有 n 个不同的个体，从中选出 n 个并将其排成一个序列，则总共有：

$$n(n-1)(n-2)...(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

个可能的组合方式。

组合 假设一个集合包含 n 个不同的元素，我们需要从中选出 m 个元素构成一个子集，则可能得到的子集总共有：

$$\frac{n(n-1)...(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

个，上式给出的整数常常又被称为**二项式系数**，记作 $\binom{n}{m}$

多项式系数 给定一组自然数 $n_1, n_2, ..., n_r$，以及 $n = n_1 + ... + n_r$，定义多项式系数为：

$$\binom{n}{n_1, n_2, ..., n_r} = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_r!}$$

Chapter 2 随机变量及其分布

2.1 随机变量

“随机变量”可以看成是将“底层”的概率空间 $(S, \mathscr{F}, P)$ “包装”成分布函数，分布列，概率密度等方便使用微积分等分析工具的“接口”，从而为我们对概率进行建模提供了莫大的便利.

Definition 2.1.1 (随机变量)：设 $(S, \mathscr{F}, P)$ 为一概率空间，我们将定义在 S 上的实值函数 $X : S \to \mathbb{R}$ 称作一个**随机变量**，若对于任意 $\mathbb{R}$ 中的区间 I，均有：

$$\{e \in S | X(e) \in I\} \in \mathscr{F}$$

上述定义中，要求 $\{e \in S | X(e) \in I\} \in \mathscr{F}$，其保证了 $\{e \in S | X(e) \in I\}$ 的概率都是有定义的，也就是对任意区间 I，我们都可以谈论“随机变量的取值落在 I 中”这一事件的概率.

Remark：上述条件实际上是从可测性而来，即对于实数轴上的任意的“合理”的子集（*Borel* 集），其原像都必须是一个可测事件（即属于事件域）同时，上述要求的一个常见的等价描述如下：“对于任意实数 x，集合 $\{e | X(e) \leq x\}$ 有确定的概率”.

另外，不满足上述条件的情况实际应用中极少出现，相关例子基本属于高等概率论的内容，其基本都是数学上卡 *BUG* 而来，一般可忽略不理.

对于给定的随机变量 X 以及关于实数 x 的命题 $\varphi(x)$，我们常用记号 $\{\varphi(X)\}$ 表示集合 $\{e \in S | \varphi(X(x))$ 成立$\}$，例如：

$$\{X > 2\} = \{e \in S \mid X(x) > 2\}$$

同时，上述集合显然构成一个事件，此事件发生的概率可简记为：$P\{\varphi(X)\}$.

随机变量之间可以进行运算，具体而言，给定 n 个随机变量 $X_1, X_2, ..., X_n$ 以及函数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，我们用 $f(X_1, ..., X_n)$ 表示将 $e \in S$ 映射为 $f(X_1(e), X_2(e), ..., X_n(e))$ 的函数.

2.2 离散型随机变量及其分布律

Definition 2.2.1 (离散型随机变量、分布列)：设 X 为一随机变量，若 X 只有可数多个可能的取值，则称 X 为**离散型随机变量**.

同时，我们定义分布列 $p_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ 为：

$$p_X(x) = P\{X = x\}, \quad x \in \mathbb{R}$$

显然，分布列满足如下性质：

Theorem 2.2.1：设 X 为一离散型随机变量，p_X 为其分布列，则：

1. 对任意 $x \in \mathbb{R}$，均有 $p_X(x) \geq 0$
2. $\{x \in \mathbb{R} | p_X(x) > 0\}$ 为可数集
3. $\sum_x p_{X(x)} = 1$

此定理的逆定理同样成立.

2.3 常见离散型随机变量

2.3.1 Bernoulli 分布

Bernoulli 试验 我们称事件 E 为 Bernoulli 试验，当试验 E 中有且只有两种可能的结果：A 以及 $\bar{A}$.

Definition 2.3.1 (Bernoulli 分布)：若事件 E 为 Bernoulli 试验，记随机变量 X 为事件 A 出现的次数，且只可能取 0 或 1，则称随机变量 X 服从 Bernoulli 分布，记为 $X \sim B(1, p)$，其分布列为：

$$P\{X = k\} = p^k(1-p)^{1-k}, k \in \{0, 1\}$$

其中 p 为事件 A 发生的概率.

其特征如下：

- 数学期望：$E(X) = P(A)$
- 方差：$D(X) = p(1-p)$

Bernoulli 分布又被称为**两点分布**或**$(0-1)$ 分布**.

2.3.2 二项分布

n 重 Bernoulli 试验 若事件 E 为 Bernoulli 试验，且独立重复 n 次，则称这一串重复的试验为 n 重 Bernoulli 试验.

Definition 2.3.2 (二项分布)：若事件 E 为 n 重 Bernoulli 试验，记 X 为事件 A 出现的次数，取值为 $0, 1, ..., n$，则称随机变量 X 服从二项分布，记为 $X \sim B(n, p)$，其分布列为：

$$P\{X = k\} = b(k; n, p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

其中，p 为每一此试验中 A 出现的概率.

其具有如下性质：
- 对称性：$b(k; n, p) = b(n-k; n, 1-p)$
- 单调性：当 $k \leq (n+1)p$ 时单调增，当 $k > (n+1)p$ 时单调减
- 当 p 相当小时，可以使用 Poisson 逼近，有：

$$b(k; n, p) \approx \frac{(np)^k}{k!} \mathrm{e}^{-np}$$

其特征如下：
- 数学期望：$E(X) = np$
- 方差：$D(X) = np(1-p)$
- 特征函数：$f(t) = (p\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + q)^n$

2.3.3 超几何分布

Definition 2.3.3 (超几何分布)：某批 N 件产品有 M 件次品，随机抽出 n 件，令随机变量 X 为抽出次品数量，称其满足超几何分布，记为 $X \sim H(n, M, N)$，其分布列为：

$$P\{X = k\} = f(k; n, M, N) = \frac{\binom{M}{N}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}, 0 \leq K \leq n \leq N, k \leq M$$

当 $N \gg n$ 时，可以使用二项分布近似.

2.3.4 Poisson 分布

Definition 2.3.4 (Poisson 分布)：设 $\lambda > 0$ 且随机变量 X 可以取一切非负整数，则称随机变量 X 服从 Poisson 分布，若：

$$P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda}, k \in \mathbb{N}$$

其特征如下：

- 数学期望：$E(X) = \lambda$
- 方差：$D(X) = \lambda$
- 特征函数：$f(t) = \mathrm{e}^{\lambda(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-1)}$

2.3.5 几何分布

Definition 2.3.5 (几何分布)：在成功概率为 p 的 Bernoulli 试验中，记随机变量 X 为首次试验时试验的次数，其可能的取值为 $1, 2, \ldots$，则称随机变量 X 服从几何分布，记为 $X \sim G(p)$，其分布列为：

$$P\{X = k\} = g(k; p) = p(1-p)^{k-1}, k \in \mathbb{N}^{+}$$

其特征如下：

- 数学期望：$E = \frac{1}{p}$

同时，几何分布还具有无记忆性，即若已知前 m 次都没有成功，设达到首次成功的等待时间为 T，则 $P(T = k) = p(1-p)^{k-1}, k \in \mathbb{N}^{+}$ 同 m 无关，离散分布中只有几何分布有此性质.

2.3.6 Pascal 分布

Definition 2.3.6 (Pascal 分布)：在成功概率为 p 的 Bernoulli 试验中，记随机变量 X 为成功第 r 次出现时的试验次数，取值为 $r, r+1, \ldots$，称随机变量 X 服从 Pascal 分布，其分布列为：

$$P\{X = k\} = \binom{k-1}{r-1} p^{r(1-p)^{k-r}}, k = r, r+1, \ldots$$

上述可推广成**负二项分布**：

Definition 2.3.7 (负二项分布)：对任意实数 $r > 0$，称

$$Nb(k; r, p) = \binom{-r}{k} p^{r}(p-1)^{k}, k \in \mathbb{N}$$

为负二项分布.

2.4 连续型随机变量及其分布律

Definition 2.4.1 (连续型随机变量、概率密度函数): 设 X 是随机变量，如果存在非负函数 $f(x)$ 使得对任何满足 $-\infty \le a < b \le \infty$ 的 a, b 有：

$$P(a < X \le b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

就称 X 是**连续型随机变量**，称 $f(x)$ 是 X 的**概率密度函数**，简称为**概率密度**.

显然，概率密度函数满足如下性质：

Theorem 2.4.1: 设 $f(x)$ 是 X 的概率密度，则 $f(x)$ 有如下的基本性质：

- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$
- $P(X = a) = 0$. 于是可推出 $P(a < X \le b) = P(a \le X \le b)$
- 对数集 A（严格意义下要求可测性）有：$P(X \in A) = \int_A f(x)\,\mathrm{d}x$

2.5 常见连续型随机变量

2.5.1 均匀分布

Definition 2.5.1 (均匀分布): 设 a, b 为有限数，则密度函数为:

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{if } a \le x \le b \\ 0 & \text{Others} \end{cases}$$

此被称为 $[a, b]$ 上的均匀分布.

- 其分布函数如下：

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{if } a < x \le b \\ 1 & \text{if } x > b \end{cases}$$

- 若 θ 服从 $[0,1]$ 均匀分布，那么对任意分布函数 $F(x)$，令 $\xi = F^{-1}(\theta)$，则不难看出 ξ 是服从分布函数 F 的随机变量.

其特征如下：

- 数学期望：$E(X) = \frac{b+a}{2}$
- 方差：$D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

2.5.2 正态分布

Definition 2.5.2 (正态分布)：密度函数为

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, x \in \mathbb{R}$$

其中 $\sigma > 0, \mu, \sigma$ 为常数，上述分布记为 $N(\mu, \sigma^2)$.

- 其分布函数如下：

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} \frac{\mathrm{e}^{-(y-\mu)^2}}{2\sigma^2} \mathrm{d}y, x \in \mathbb{R}$$

- 当 $\mu = 0, \sigma = 1$ 时称其为标准正态分布，其密度函数和分布函数分别记为 ϕ 和 Φ

其具有如下性质：

- 若 $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$，则 $\eta = \frac{\xi-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$
- 若 $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$，则 $F(x) = P\left(\frac{\xi-\mu}{\sigma} < \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$，且 $P(|\xi - \mu| < k\sigma) = 2\Phi(k) - 1$，且 $P(a \le \xi \le b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$
- 相互独立分布相同的两个随机变量 ξ, η 如果满足密度函数不等于 0 且二阶可导，且 $\xi + \eta, \xi - \eta$ 相互独立，那么 $\xi, \eta, \xi + \eta, \xi - \eta$ 都服从正态分布.

其特征如下：

- 数学期望：$E(X) = \mu$
- 方差：$D(X) = \sigma^2$，σ 被称为标准差
- 特征函数：$f(t) = \exp\left(\mathrm{i}\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right)$

2.5.3 指数分布

Definition 2.5.3 (指数分布)：密度函数为

$$p(x) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{if } x \ge 0 \\ 0 & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

这里 $\lambda > 0$ 为参数，称为指数分布，记为 $\mathrm{Exp}(\lambda)$.

其具有如下性质：

- 无记忆性：对于任意的 $s,t>0$，有 $P(\xi \geq s+t|\xi \geq s)=P(\xi \geq t)$（连续分布里只有指数分布有此性质）

　其特征如下：

- 数学期望：$E=\frac{1}{\lambda}$

2.5.4 Erlang 分布

Definition 2.5.4 (Erlang 分布)：对于任意的 $r \in \mathbb{N}^{+}, \lambda>0$，密度函数：

$$p(x)=\frac{\lambda^{r}}{(r-1)!} x^{r-1} \mathrm{e}^{-\lambda x}, x>0$$

称为 Erlang 分布.

2.5.5 Γ 分布

Definition 2.5.5 (Γ 分布)：对任意的 $r,\lambda>0$，密度函数：

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^{2}}{\Gamma(r)} x^{r-1} \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{if } x>0 \\ 0 & \text{if } x \leq 0\end{cases}$$

称为 Γ 分布.

2.5.6 χ^2 分布

Definition 2.5.6 (χ^2 分布)：密度函数为：

$$p(x)=\frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} x^{n/2-1} \mathrm{e}^{-(x/2)}, x>0$$

的分布称为具有自由度 n 的 χ^2 分布，记作 χ_n^2.

- 不难得知 χ^2 分布是 Γ 分布的特例.
- 若相对独立的 χ^2 分布 ξ,η 自由度分别为 m,n，则 $\xi+\eta$ 服从 $m+n$ 的 χ^2 分布.
- 对相对独立且服从 $N(0,1)$ 的随机变量 $\xi_1,...,\xi_n$，则 $\eta=\xi_1^2+...+\xi_n^2$ 服从 χ^2 分布.

Chapter 3 多维随机变量

3.1 随机向量及其联合分布

许多情况下，我们关系不止一个随机变量，而是多个随机变量 $X_1, ..., X_n$ 的相互关系，此时我们可以将这些随机变量作为整体进行研究，故有随机向量定义如下：

Definition 3.1.1 (随机向量): 给定 n 个随机变量 $X_1, ..., X_n$，我们将它们构成的有序组 $(X_1, ..., X_n)$ 称为 n 维随机向量.

Note: 我们默认将形如 $(a_1, ..., a_n)$ 的有序组（包括数组和随机向量）均看成列向量.

对于随机向量，上述定义可进行推广如下：

Definition 3.1.2 (离散型随机向量、联合分布列): 若 $X_1, ...X_n$ 均为离散型随机变量，则称 $\boldsymbol{X} = (X_1, ..., X_n)$ 为离散型随机向量，其联合分布列被定义为函数：

$$p_{X_1,...X_n}(x_1, ..., x_n) = P\{X_1 = x_1, ...X_n = x_n\}$$

3.2 离散型随机向量及其分布律

3.3 常见离散型随机向量

3.3.1 多项分布

Definition 3.3.1 (多项分布): 设试验可能的结果为 $A_1, ..., A_r$，$P(A_i) = p_i$，且 $p_1 + ... + p_i = 1$，重复 n 次试验，每次试验独立，记随机变量 X_i 为 A_i 出现次数，则称随机向量 $(X_1, ..., X_r)$ 服从多项分布，分布列为：

$$P\{X_1 = k_1, ..., X_r = k_r\} = \frac{n!}{k_{1!}...k_{r!}} p_1^{k_1}...p_r^{k_r}$$

其具有如下性质：

- 协方差：$\mathrm{con}(X_i, X_j) = -np_ip_j$
- 相关系数：$\rho = -\sqrt{\frac{p_ip_j}{(1-p_i)(1-p_j)}}$

3.3.2 多元超几何分布

Definition 3.3.2 (多元超几何分布)：设袋子中有 N_i 个 i 号球，$i = 1, 2, ..., r$，且 $N_1 + ... + N_r = N$，从中摸出 n 只，记随机变量 X_i 为 i 号球出现的次数，则称随机向量 $(X_1, ..., X_r)$ 服从多元超几何分布，分布列为：

$$P(X_1 = n_1, ...X_r = n_r) \frac{\binom{N_1}{n_1}...\binom{N_r}{n_r}}{\binom{N}{n}}$$

3.4 连续型随机向量及其分布律

3.5 常见连续型随机向量

3.5.1 多元均匀分布

Definition 3.5.1 (多元均匀分布)：若 $G \subset \mathbb{R}^n$ 的正测有限区域，则密度函数：

$$p(x_1, ..., x_n) = \begin{cases} \frac{1}{m(G)} & \text{if } (x_1, ..., x_n) \in G \\ 0 & \text{if } (x_1, ..., x_n) \notin G \end{cases}$$

称为多元均匀分布.

3.5.2 多元正态分布

Definition 3.5.2 (多元正态分布): 若 $\mathbf{\Sigma} = \left(\sigma_{ij}\right)$ 是 n 阶正定矩阵，设逆矩阵 $\mathbf{\Sigma}^{-1} = \left(\gamma_{ij}\right)$，设 $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, ..., \mu_n)^\mathsf{T}$ 为任意实值列向量，则有密度函数：

$$\begin{aligned} p(x_1, ..., x_n) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}(\det \mathbf{\Sigma})^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n} r_{jk}\left(x_j - \mu_j\right)(x_k - \mu_k)\right) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}(\det \mathbf{\Sigma})^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})^\mathsf{T}\mathbf{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})\right) \end{aligned}$$

定义的分布为 n 元正态分布，记为 $N(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{\Sigma})$.

Chapter 4　杂七杂八

4.1　概率的连续性

4.2　测度论简介

Chapter 5 Typst 测试章节

5.1 Test Section

§5.1

5.2 Test Test Test 02