数学物理方程笔记

Guotao He

2025-07-22

目录

Chapter 1

复变函数

1.1 复变函数的导数和微分

Definition 1.1.1 (导数). 设函数 $f(z)$ 是区域 G 上定义的单值函数，若在点 z 处存在极限：

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

且与 $\Delta z\to 0$ 的方式无关，则称函数 $f(z)$ 在 z 点的导数存在.

Definition 1.1.2 (可微). 若函数 $w=f(z)$ 在 z 处的改变量 $\Delta w=f(z+\Delta z)-f(z)$ 可以写为：

$$\Delta w=A(z)\Delta z+\rho(\Delta),\quad \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\rho(z)}{\Delta z}=0$$

则函数 $f(z)$ 在 z 处可微，其线性部分被称为函数的微分.

可以证明，函数在 z 处可导和可微互为充要条件，因此 $\mathrm{d}f(z)=f'(z)\,\mathrm{d}z$.

上述式子中我们可以得到复变函数的导数的几何意义：若函数 $f(z)$ 在 z_0 处可导，则在 z_0 处的小邻域经过函数 $f(z)$ 的变换相当于乘上一个固定的复数 $f'(z_0)$. 又因为乘上一个固定的复数相当于进行了拉伸和旋转两步，其不会经历剪切过程，因此此变换是一个保角变换[1].

Theorem 1.1.1 (Cauchy - Riemann 条件). 设复变函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 可导，则其一个必要不充分条件是函数 $f(z)$ 满足：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$$

若在极座标下，则满足：

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta},\quad \frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

C-R 条件其实可以借助几何直观的推出. 若函数在 z_0 可导，则该函数在 z_0 处的小邻域内是保角变换，因此，其实轴的基矢的位移与虚轴的基矢的位移模长相等，方向正交. 也就是：

$$\mathrm{d}v=\mathrm{i}\cdot\mathrm{d}u$$

例如，在直角坐标下，我们先写出 u,v 的全微分：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}u&=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y\\ \mathrm{d}v&=\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y\end{aligned}$$

同时，我们知道直角坐标下 $\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}y$ 的关系：$\mathrm{d}y=\mathrm{i}\cdot\mathrm{d}x$. 因此：

[1] 当然，这要求 $f'(z_0)\neq 0$，$f(z)=0$ 的保角性需要额外讨论.

$$\mathrm{d}v = \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x = \left(-\frac{\partial u}{\partial y} + \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial x}\right)\mathrm{d}x = \mathrm{i}\mathrm{d}u$$

故：

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{y} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

即直角坐标下 C-R 条件. 同理，在极座标下：

$$\mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial r}\mathrm{d}r + \frac{\partial u}{\partial \theta}\mathrm{d}\theta$$
$$\mathrm{d}v = \frac{\partial v}{\partial r}\mathrm{d}r + \frac{\partial v}{\partial \theta}\mathrm{d}\theta$$

同时，在极座标下 $\mathrm{d}r$ 和 $\mathrm{d}\theta$ 的关系：$r\mathrm{d}\theta = \mathrm{i}\mathrm{d}r$，因此：

$$\mathrm{d}v = \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\mathrm{i}}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\right)\mathrm{d}r = \left(-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial r}\right) = \mathrm{i}\mathrm{d}u$$

故：

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial r}$$

如果一个函数 $f(z)$ 在 z_0 处满足 C-R 条件，仍不能说明 $f(z)$ 在 z_0 处可导，C-R 条件只是可导的必要条件并不是充分条件，C-R 条件只保证了 Δz 以平行于实轴和虚轴这两种特殊方式趋近于 0 时，极限逼近与同一个值.

一个可导的充分条件是，函数 $f(z) = u + \mathrm{i}v$ 的实部和虚部在 $z_0 = (x, y)$ 处均可微，也就是 $\partial_x u, \partial_y u, \partial_x v, \partial_y v$ 四个偏导数存在且连续，同时满足 C-R 条件，则该函数在 z_0 可导.

1.2 解析函数和多值函数

Definition 1.2.1 (解析函数)**.** *若函数 $f(z)$ 在区域 G 内处处可导，则函数 $f(z)$ 在 G 内解析.*

- 解析函数的实部和虚部不是独立的，知道了其中之一，根据 C-R 条件就可以唯一地确定另外一个.（当然有可能相差一个常数）
- 不是任意的二元函数都可以作为解析函数的实部和虚部，它们必须是调和函数，即 $f(z) = u + \mathrm{i}v$ 的 u 和 v 需要满足 Laplace 方程.

$$\nabla^2 u = 0, \quad \nabla^2 v = 0$$

- 如果一个函数 $f(z)$ 是解析函数，则这一个函数必定是单值函数，也就是对于定义域中任意一个自变量 z，有且只有一个对应的函数值 $f(z)$. 这是因为如果函数是多值函数，则当 Δz 从不同路径趋于 0 时，$f(z + \Delta z)$ 有可能会到不同的分支上，从而使得极限依赖于 Δz 趋近于 0 的路径.

Definition 1.2.2 (多值函数)**.** 若在区域 G 内，复数 $z \in G$ 有多个复数 $w_0, \ldots, w_n$ 与之对应，w 和 z 的映射关系记为 f，则 f 称为定义在 G 上的多值函数.

实际上，我们所接触的多值函数就三种：$\sqrt[n]{z}, \ln z, z^\alpha$. 多值函数虽然名字中叫“函数”，实际上根本不是函数. 函数要求是一个自变量被映射到唯一的另一个自变量，显然多值函数不满足这一点.

多值函数的多值性来自于宗量相位的多值性. 因此多值函数中可以定义分支点.

Definition 1.2.3 (分支点)**.** 对于多值函数 $w = f(z)$，$\exists r > 0$，当自变量 z 绕圆周 $|z - z_0| = r$ 一周回到原处时，因变量 w 值不还原，且 $r \to 0$ 时，w 仍旧不还原，则 z_0 就是一个分支点. 当 z 绕 z_0 点 n 周时 w 复原，则称该点为多值函数的 $n-1$ 阶分支点.

无穷远点也可以是分支点，只需要作变换 $z = 1/t$ ，考察 $t = 0$ 是否是分支点即可.

我们不难发现，只要我们限制自变量不要在分支点上绕圈圈，就不会产生多值现象. 同时，多值函数之所以不是函数，是因为其将一个点映射到多个点，因此，我们可以“稀释”一下定义域，将定义域变成多个复平面，从而使得定义域到值域变成是一一对应的，这样我们就可以用解析函数的各种性质了.

因此，我们人为在两个分支点之间连线（不一定是直线），从而得到割线，并要求如果自变量 z 经过了割线，就要变更复平面. 我们可以想象不同的复平面是不同的层，割线就是不同层的“楼梯”，经过割线就会升降层从而进入不同的复平面，在可视化上就相当于将不同层的割线“粘”起来. 这样得到东西就是所谓的 Riemann 面.

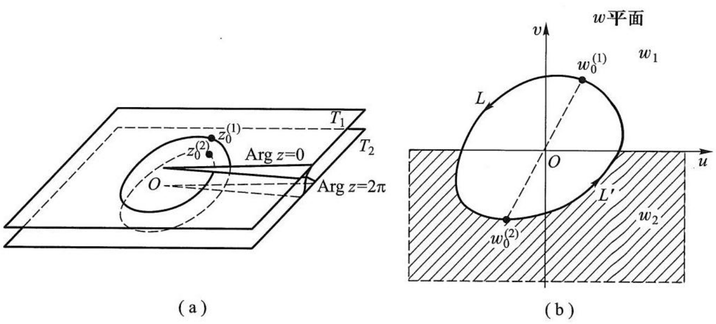

图 1.1: $\sqrt{z}$ 的 Riemann 面可视化

常见的多值函数的分支点和割线如下：

- 根式函数 $\sqrt[n]{z}$：分支点：$0, \infty$，割线：$\{z|\arg z = 0\}$
- 对数函数 $\ln z$：分支点：$0, \infty$，割线：$\{z|\arg z = 0\}$
- 幂函数 z^α：分支点：$0, \infty$，割线：$\{z|\arg z = 0\}$

1.3　复变积分

Definition 1.3.1 (复变积分)**.** 设 C 是分段光滑的曲线，则复变积分可以定义为两个实变线积分的组合：

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_C (u+\mathrm{i}v)(\mathrm{d}x+\mathrm{i}\mathrm{d}y)\\ &= \int_C (u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y) + \mathrm{i}\int_C (v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y)\end{aligned}$$

一般说来, 复变积分的数值, 不仅依赖于被积函数和积分路径的端点, 而且还依赖于积分路径本身.

1.4 Cauchy 定理

1.5 复变级数

1.6 留数定理

Chapter 2
积分变换

Chapter 3

数学物理方程