微分形式与外微分简介

Guotao He

2025-05-24

> “只要演算是优美的，要相信我们总能找到对应的结构.”

目录

（文档更新于 `https://ghe0000.pp.ua/files/%E5%BE%AE%E5%88%86%E5%BD%A2%E5%BC%8F%E7%AE%80%E4%BB%8B.pdf`）

这里我们不对微分形式的引入和严格定义进行说明，仅作为简单的在微积分中的学习和计算的基本引入，略去所有微分几何的内容，仅介绍微分形式和外微分的一些基本的运算法则，更详细地介绍请参考微分几何的相关教材.

为了和微积分中的形式相对应，这里我们不区分协变和逆变，即默认是在正交基底下进行的讨论.

1 1-形式

在整个文档中我们将介绍形式有关的一些运算和性质. 所谓形式，完整的叫外微分形式，或者说微分形式，其实就是在随便一个微分，例如：

$$\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{xy}\right)=\mathrm{e}^{xy}\left(x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x\right)=\mathrm{e}^{xy}x\mathrm{d}y+\mathrm{e}^{xy}y\mathrm{d}x$$

中的 $\mathrm{e}^{xy}x\mathrm{d}y+\mathrm{e}^{xy}y\mathrm{d}x$，或者是随便一个积分，例如：

$$\int_D \sin(xy)\,\mathrm{d}x$$

中的 $\sin(xy)\,\mathrm{d}x$. 这些就是所谓的微分形式（后文简称为形式）.

在一个 n 维的欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 中，一个 1-形式的一般形式可以表示为:

$$\omega = a_1\mathrm{d}x_1 + a_2\mathrm{d}x_2 + \cdots + a_n\mathrm{d}x_n$$

其中 a_i 为一个 n 元函数（$i = 1, 2, \ldots, n$）.

Remark 1.1. *这里的维度，实际取决于 n 元函数的 n，而不取决与微分 $\mathrm{d}x_i$ 的个数. 例如，形式 $\omega = f(x, y, z)\,\mathrm{d}x$ 是一个定义在 3 维空间中的 1-形式，对应上面的一般形式有 $a_1 = f, a_2 = 0, a_3 = 0$.*

不难发现，n 维下全体 1-形式的集合是一个线性空间，记为 Ω^1. 且 $\mathrm{d}x_i$ 是线性空间的一组基底，而函数 a_i 则是一组坐标.

一个常见的 1-形式就是一个标量函数的全微分，例如若 $f(x_1, \ldots, x_n)$ 是光滑函数，则其全微分:

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n$$

是一个 1-形式.

在微分形式中，有一个非常重要的性质：**微分形式不变性**，即不同坐标下的微分具有相同的形式，具体而言，若 $\omega = a\mathrm{d}x$，且 $\mathrm{d}x = b\mathrm{d}t$，则直接有：$\omega = ab\mathrm{d}t$. 这个性质在之后的高阶微分形式中均可以使用.

2 楔积、k-形式

我们在 1-形式之间引入楔积（$\wedge$），定义其运算规则为:

Definition 2.1 (楔积)**.** *楔积（$\wedge$）是定义在 1-形式 $\alpha, \beta, \gamma, \cdots \in \Omega^1$ 之间的运算，满足如下性质:*

- 反对称性：$\alpha \wedge \beta = -\beta \wedge \alpha$（推论：$\alpha \wedge \alpha = 0$）
- 线性：$(a\alpha + b\beta) \wedge \gamma = a\alpha \wedge \gamma + b\beta \wedge \gamma$（$a, b \in \mathbb{R}$）
- 结合性：$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = \alpha \wedge \beta \wedge \gamma$

Remark 2.1. *上述楔积定义是在 1-形式上的，在一般的 k-形式上，楔积的反对称性不一定成立. 比如，对于一个 2-形式 $\alpha = \mathrm{d}x_1 \wedge dx_2$ 和 1-形式 $\beta = \mathrm{d}x_3$，有:*

$$\alpha \wedge \beta = \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 = -\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_2 = \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 = \beta \wedge \alpha$$

一般地，若 α 是一个 p-形式，β 是一个 q-形式，则 $\alpha \wedge \beta = (-1)^{p+q}\beta \wedge \alpha$.

由 k 个 1-形式线性组合可以得到 k-形式. n 维下的可以表示为:

$$\omega = \sum_{1 \le i_1 \le i_2 \le \cdots \le i_k \le n} \alpha_{i_1 i_2 \ldots i_k}\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}$$

例如，2-形式的一般形式可以表示为:

$$\omega=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}a_{ij}\mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_j=a_{11}\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_1+a_{12}\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2+\cdots+a_{nn}\mathrm{d}x_n\wedge\mathrm{d}x_n$$

其中 a_{ij} 为一个 n 元函数（$i,j=1,2,\ldots,n$）.

同样地，n 维下的全体 k-形式的集合同样构成一个线性空间，记为 Ω^k. 且 $\mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_j$ 是线性空间的一组基底，而函数 a_{ij} 则是一组坐标.

另外，我们记任意的 n 元标量函数 $f(x_1,\ldots x_n)$ 称为一个 0-形式，同样地，记所有 0-形式的集合为 Ω^0.

Remark 2.2. *这里需要区分 n 维空间中的 k-形式的 n 和 k，这两者一般而言是不同的. 且显然，在一个 n 维空间中，由于只能有 n 个 $\mathrm{d}x_i$，因此，最多只能有非零的 n-形式，若 $k\geq n$，则由于抽屉原理，必然有 $\mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_i$，从而其 k-形式必然为 0.*

在常见的三维欧式空间 $\mathbb{R}^3$ 中，有（P,Q,R 均为一个三元变量函数）:

- 0-形式：标量函数 $f(x,y,z)$
- 1-形式：$P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$
- 2-形式：$P\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y+Q\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+R\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x$
- 3-形式：$f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$

为了书写的简便，有时我们会简略掉楔积的符号，因此：

- 2-形式对应面元微分：$\mathrm{d}S=P\mathrm{d}x\mathrm{d}y+Q\mathrm{d}y\mathrm{d}z+R\mathrm{d}zdx$
- 3-形式对应体积微分：$\mathrm{d}V=f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

在 k-形式中，我们仍旧可以使用微分形式的不变性. 比如，二维欧式空间 $\mathbb{R}^2$ 中的一个面积微元是一个 2-形式，其为：

$$\omega=\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

在极座标中重新表示 2-形式，有坐标变换关系：

$$\begin{cases}x=R\cos\theta\\ y=R\sin\theta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}x=\mathrm{d}R\cos\theta-R\sin\theta\mathrm{d}\theta\\ \mathrm{d}y=\mathrm{d}R\sin\theta+R\cos\theta\mathrm{d}\theta\end{cases}$$

因此：

$$\begin{aligned}\omega&=\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\\&=(\mathrm{d}R\cos\theta-R\sin\theta\mathrm{d}\theta)\wedge(\mathrm{d}R\sin\theta+R\cos\theta\mathrm{d}\theta)\\&=\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}R\wedge\mathrm{d}R-R^2\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\theta+R\cos^2\theta\mathrm{d}R\wedge\mathrm{d}\theta-R\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}R\\&=R\cos^2\theta\mathrm{d}R\wedge\mathrm{d}\theta-R\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}R\quad(\mathrm{d}\alpha\wedge\mathrm{d}\alpha=0,\text{由楔积的反对称性决定})\\&=R\mathrm{d}R\wedge\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

Remark 2.3. *在计算的过程中需要注意，运算中不能随意交换 $\mathrm{d}R\wedge\mathrm{d}\theta$ 的顺序，交换后会产生一个负号.*

上述结论和通过 Jacobi 行列式计算得到的面积微元变换相同. 即:

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y = R\mathrm{d}R\mathrm{d}\theta$$

Remark 2.4. 这里可以注意到，在最后的化简时，我们除了可以写为:

$$\omega = R\mathrm{d}R \wedge \mathrm{d}\theta$$

外，还可以写为:

$$\omega = -R\mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}R$$

但是若通过 *Jacobi* 行列式，我们只有:

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y = R\mathrm{d}R\mathrm{d}\theta$$

并没有前面的负号. 这是为什么呢？实际上，在通过 *Jacobi* 行列式计算时，我们只取了绝对值，实际上是忽略了面积定向可能发生的变化. 因此，如果我们并不关心面积的具体定向，我们可以根据实际情况，直接忽略前面的负号.

那为什么在进行积分计算时我们忽略的负号不会造成积分结果差一个负号呢？这是因为当我们换元后，我们往往会根据实际情况重新确定上下限，而这个重新确定上下限的过程重新确定了积分的方向，也因此去除了负号的影响.

高维积分的例子比较复杂，这里仅以一维积分举例. 对于积分

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

若进行变换 $\mathrm{d}x \to -\mathrm{d}x$，然后根据实际问题，我们重新确定上下限（交换上下限），有:

$$\int_b^a f(x) \cdot -\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

和原先的结果相同. 在更高维的积分中，我们重新将重积分转为累次积分确定上下限的过程实际消除了负号的影响.

在三维空间中上述过程同样成立. 在三维欧式空间中，其体积微元是一个 3-形式，具体有:

$$\omega = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$$

现在我们想将其转为球坐标表示，有坐标变换（这里根据数学的惯例，令 ϕ 为天顶角）:

$$\begin{cases} x = R\sin\phi\cos\theta \\ y = R\sin\phi\sin\theta \\ z = R\cos\phi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}x = \mathrm{d}R\sin\phi\cos\theta + R\cos\phi\cos\theta\mathrm{d}\phi - R\sin\phi\sin\theta\mathrm{d}\theta \\ \mathrm{d}y = \mathrm{d}R\sin\phi\sin\theta + R\cos\phi\sin\theta\mathrm{d}\phi + R\sin\phi\cos\theta\mathrm{d}\theta \\ \mathrm{d}z = \mathrm{d}R\cos\phi - R\sin\phi\mathrm{d}\phi \end{cases}$$

因此，有:

$$\begin{aligned}\omega &= \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \\ &= \left(\mathrm{d}R\sin\phi\cos\theta + R\cos\phi\cos\theta\mathrm{d}\phi - R\sin\phi\sin\theta\mathrm{d}\theta\right) \\ &\quad \wedge \left(\mathrm{d}R\sin\phi\sin\theta + R\cos\phi\sin\theta\mathrm{d}\phi + R\sin\phi\cos\theta\mathrm{d}\theta\right) \\ &\quad \wedge \left(\mathrm{d}R\cos\phi - R\sin\phi\mathrm{d}\phi\right)\end{aligned}$$

通过展开并利用外积的反对称性（如 $\mathrm{d}R \wedge \mathrm{d}R = 0$，$\mathrm{d}\phi \wedge \mathrm{d}\phi = 0$ 等），仅保留非零项后可得：

$$\omega = R^2 \sin\phi \mathrm{d}R \wedge \mathrm{d}\phi \wedge \mathrm{d}\theta$$

和通过 Jacobi 行列式计算的结果相同，即：

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = R^2 \sin\phi \mathrm{d}R\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\theta$$

3 微分形式的外微分

在引入了 k-形式之后，现在我们来考虑 k-形式的一些运算. 其中一个重要的运算就是外微分运算. 具体而言，其定义如下：

Definition 3.1 (外微分算子)**.** *对于一个 k-形式 $\omega \in \Omega^k$，定义外微分运算 $\mathrm{d} : \Omega^k \to \Omega^{k+1}$，其输入一个 k-形式，得到一个 k+1 形式. 有如下性质：*

- *线性：$\mathrm{d}\left(a\alpha + b\beta\right) = a\mathrm{d}\alpha + b\mathrm{d}\beta \;\; (a, b \in \mathbb{R})$*
- *Leibniz 律：$\mathrm{d}\left(\alpha \wedge \beta\right) = \mathrm{d}\alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg\alpha} \alpha \wedge \mathrm{d}\beta$*
- *幂零性：$\mathrm{d}\left(\mathrm{d}\alpha\right) = \mathrm{d}^2\alpha = 0$*

其中，$\deg\alpha$ 为形式 α 的次数（即若 α 是一个 k-形式，则 $\deg\alpha = k$）.

Remark 3.1. *这里的 Leibuniz 律看起来很奇怪，实际上有一个理解的好方法. 我们可以把外微分算符 d 本身看成一个 1-形式，则在 d 到达 β 之前，必须要将其推到 α 的所有 1-形式的后面，从而交换了 $deg\alpha$ 次，从而正负号改变了 $\deg\alpha$ 次.*

一般情况下，就高等数学而言，我们基本只会碰到对一个单独的 k-形式进行外微分运算. 若 $\omega \in \Omega^k$ 是一个 k-形式，其一般形式为：

$$\omega = \sum_{1 \le i_1 \le i_2 \le \cdots \le i_k \le n} \alpha_{i_1 i_2 \ldots i_k} \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}$$

则对其做外微分计算，就相当于将其中的系数 $\alpha_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ 化为全微分：

$$\alpha_{i_1 i_2 \ldots i_k} \to \frac{\partial \alpha_{i_1 i_2 \ldots i_k}}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial \alpha_{i_1 i_2 \ldots i_k}}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 + \cdots + \frac{\partial \alpha_{i_1 i_2 \ldots i_k}}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n$$

再在后面加上一个楔积（$\wedge$）.

上述过程看起来很复杂，但实际上非常简单. 例如，现在我们在 2 维空间中有一个 1-形式：

$$\omega = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

对其求外微分，有：

$$\mathrm{d}\omega=\left(\frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\wedge\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial Q}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\wedge\mathrm{d}y$$

然后进行展开，化简，保留非 0 项，得到：

$$\mathrm{d}\omega=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

即二维空间中的旋度.

现在我们看一个 3 维空间中的 2-形式的例子，对于一个 3 维空间中的 2-形式，其一般形式为：

$$\omega=P\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

对其求外微分，有：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega&=\left(\frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial P}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z\\&\quad+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial Q}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial Q}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\wedge\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x\\&\quad+\left(\frac{\partial R}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial R}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\wedge\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\\&=\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z\end{aligned}$$

即三维空间的散度.

从上面可以看出，旋度和散度和外微分有很大关系，在下一个章节我们将具体说明.

4 梯度、旋度、散度

由于外微分运算将一个 k-形式变成一个 $(k+1)$-形式，因此，在 n 维空间中，我们最多只能对 $(n-1)$-形式进行外微分运算.(否则得到的结果恒定为 0，见 Remark 2.2).

4.1 1 维情况

现在我们讨论 1 维空间中的外微分. 在 1 维空间中，我们只能对 0-形式进行外微分运算，记 $\omega=f(x)\in\Omega^0$，有：

$$\mathrm{d}\omega=\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x$$

这里由于函数 $f(x)$ 有且只有一个自变量，因此 $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.

4.2 2 维情况

在 2 维空间中，我们可以对 0-形式和 1-形式进行外微分运算.

- **0-形式**：设 $\omega_0=f(x,y)\in\Omega^0$，有：

$$\mathrm{d}\omega_0 = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y$$

即 2 维空间中的梯度.

- **1-形式：** 设 $\omega_1 = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y \in \Omega^1$，有：

$$\mathrm{d}\omega_1 = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

4.3 3 维情况

在 3 维空间中，外微分可作用于 0-形式、1-形式和 2-形式：

- **0-形式**：设 $\omega_0 = f(x, y, z) \in \Omega^0$，其外微分为：

$$\mathrm{d}\omega_0 = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z$$

对应向量分析中的梯度 ∇f.

- **1-形式**：设 $\omega_1 = Pdx + Qdy + Rdz \in \Omega^1$，其外微分为：

$$\mathrm{d}\omega_1 = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

对应向量分析中的旋度 $\nabla \times (P, Q, R)$.

- **2-形式**：设 $\omega_2 = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy \in \Omega^2$，其外微分为：

$$\mathrm{d}\omega_2 = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$$

对应向量分析中的散度 $\nabla \cdot (P, Q, R)$.

同时，根据外微分的幂零性（$\mathrm{dd}\omega = 0$），我们马上可以得到：

- **梯度无旋**（$\mathrm{dd}\omega_0 = 0$）
- **旋度无散**（$\mathrm{dd}\omega_1 = 0$）

5 微分形式的积分，广义 Stokes 定理

在引入了微分形式和外微分后，现在我们可以将所有的古典的微积分定理全部统一成一个：广义 Stokes 定理：

Theorem 5.1 (广义 Stokes 定理)**.** *若 M 为紧致带边界的 k 维定向区域，$\omega \in \Omega^{k-1}$ 为 $(k-1)$-形式，则：*

$$\int_M \mathrm{d}\omega = \int_{\partial M} \omega$$

其中 $\mathrm{d}\omega$ 是 ω 的外微分，∂M 为 M 的边界.

根据 Section 4 的计算，我们有：

- **Newton-Leibniz 定理：** 1 维下的 0-形式（区域为一条线段，边界为两个端点）：

$$\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x = f(x)|_a^b$$

- **Green 定理：** 2 维下的 1-形式（区域为一个二维单联通平面，边界为其闭合边界曲线）：

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \oint_{\partial D} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

- **（狭义）Stokes 定理：** 3 维下的 1-形式（区域为一个二维单联通平面，边界为其闭合边界曲线）：

$$\iint_D \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$
$$= \oint_{\partial D} Pdx + Qdy + Rdz$$

- **Gauss 定理：** 3 维下的 2-形式（区域为一个三维单联通体积，边界为其闭合曲面）：

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z = \oiint_{\partial V} Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$$

至此，我们将古典微积分中所有的定理统一成一个定理，且也可以很方便地拓展到更高维度和更一般的情况. 这里的 Stokes 公式可以认为是微积分的顶峰，从理论上讲，这是微积分基本定理的最一般的情况，也是微积分从古典走向现代的入口.

6 附：Hodge 对偶，叉乘

对于一个 n 维空间的 1-形式，有 $\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_n$ 一共 n 个基底，这些基底可以进行楔积运算得到任意 k-形式的基底，但若要非 0，则相当于要从 n 个基底中抽取不重复的 k 个，因此 n 维空间的 k-形式的非 0 基底一共有 $\binom{n}{k}$ 个. 根据二项式系数的性质，我们不难发现：$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$，即 k-形式的和 $(n-k)$-形式的基底个数相同. 这意味着这样的一对空间之间存在线性同构，因此，我们可以构造一种线性映射使得任意 k-形式都能映射成一个唯一的 $(n-k)$-形式，此映射即 Hodge 星算子（$\star$）.

Definition 6.1 (Hodge 星算子)**.** *Hodge 星算子是一种映射，将 n 维空间中的 k-形式映射到 $(n-k)$-形式，即*

$$\star : \Omega^k \to \Omega^{n-k}$$

在n 维欧式空间中，选取正交基 $\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_n$，考察一个 k-形式：

$$\omega = \sum_{1 \le i_1 \le i_2 \le \cdots \le i_k \le n} a_{i_1 i_2 \ldots i_k} \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}$$

其 Hodge 星算子运算如下：

$$\star\omega = \sum_{1 \le i_1 \le i_2 \le \cdots \le i_k \le n} \sum_{1 \le i_{k+1} \le i_{k+2} \le \cdots \le i_n \le n} \varepsilon_{i_1 \ldots i_k i_{k+1} \ldots i_n} a_{i_1 i_2 \ldots i_k} \mathrm{d}x_{i_{k+1}} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n$$

其中 $\{i_{k+1}, \ldots, i_n\} = \{1, \ldots, n\} \setminus \{i_1, \ldots, i_k\}$，$\varepsilon_{i_1 \ldots i_k i_{k+1} \ldots i_n}$ 为 Levi-Civita 符号，其在欧式空间中等于 -1 的下标的逆序数次方.

常用的 Hodge 对偶如下：

- **2 维欧式空间：**

$$\begin{aligned}\star 1 &= \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\ \star \mathrm{d}x &= \mathrm{d}y \\ \star \mathrm{d}y &= -\mathrm{d}x \\ \star(\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y) &= 1\end{aligned}$$

- **3 维欧式空间：**

$$\begin{aligned}\star 1 &= \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \\ \star \mathrm{d}x &= \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \\ \star \mathrm{d}y &= \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x \\ \star \mathrm{d}z &= \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\ \star(\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z) &= \mathrm{d}x \\ \star(\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x) &= \mathrm{d}y \\ \star(\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y) &= \mathrm{d}z \\ \star(\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z) &= 1\end{aligned}$$

我们不难发现，对于 3 维空间中的 1-形式和 2-形式之间的 Hodge 对偶，其形式和叉乘相同.

Hogde 星算子的一个重要的性质如下：对于任意 k-形式 $\alpha, \beta \in \Omega^k$，若有标准正交基 $\{\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_n\}$，记：

$$\omega = \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n$$

则：

$$\alpha \wedge \star\beta = \langle \alpha, \beta \rangle \, \omega$$

其中 $\langle \alpha, \beta \rangle$ 为矢量 α 和 β 的内积（Ω^k 本身就是一个向量空间）.

借助这个性质，以及 3 维欧式空间中的 Hodge 对偶，引入 Nabla 算子：

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

我们可以进一步改写 Gauss 定理和狭义 Stokes 定理：

- **Gauss 定理（向量分析形式）：**

$$\iiint_V \nabla \cdot \boldsymbol{F} \mathrm{d}v = \oiint_{\partial V} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S$$

- **（狭义）Stokes 定理（向量分析形式）：**

$$\iint_D \nabla \times \boldsymbol{F} \mathrm{d}s = \oint_{\partial D} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}l$$