$$
\begin{aligned}
&\mathcal{L}_{\text{StandardModel}} = -\frac{1}{2}\partial_\nu g^a_\mu \partial_\nu g^a_\mu - g_s f^{abc}\partial_\mu g^a_\nu g^b_\mu g^c_\nu - \frac{1}{4} g_s^2 f^{abc} f^{ade} g^b_\mu g^c_\nu g^d_\mu g^e_\nu + \frac{1}{2} i g_s^2 (\bar q^\sigma_i \gamma^\mu q^\sigma_j) g^a_\mu + \bar G^a \partial^2 G^a + g_s f^{abc}\partial_\mu \bar G^a G^b g^c_\mu - \partial_\nu W^+_\mu \partial_\nu W^-_\mu - \\
&M^2 W^+_\mu W^-_\mu - \frac12 \partial_\nu Z^0_\mu \partial_\nu Z^0_\mu - \frac{1}{2c_w^2} M^2 Z^0_\mu Z^0_\mu - \frac12 \partial_\mu A_\nu \partial_\mu A_\nu - \frac12 \partial_\mu H \partial_\mu H - \frac12 m_h^2 H^2 - \partial_\mu\phi^+\partial_\mu\phi^- - M^2\phi^+\phi^- - \frac12 \partial_\mu\phi^0\partial_\mu\phi^0 - \frac{1}{2c_w^2} M\phi^0\phi^0 - \beta_h \Big[\frac{2M^2}{g^2} + \\
&\frac{2M}{g} H + \frac12 (H^2 + \phi^0\phi^0 + 2\phi^+\phi^-) \Big] + \frac{2M^4}{g^2}\alpha_h - igc_w [\partial_\nu Z^0_\mu (W^+_\mu W^-_\nu - W^+_\nu W^-_\mu) - Z^0_\nu (W^+_\mu \partial_\nu W^-_\mu - W^-_\mu \partial_\nu W^+_\mu) + Z^0_\mu (W^+_\nu \partial_\nu W^-_\mu - \\
&W^-_\nu \partial_\nu W^+_\mu)] - igs_w [\partial_\nu A_\mu (W^+_\mu W^-_\nu - W^+_\nu W^-_\mu) - A_\nu (W^+_\mu \partial_\nu W^-_\mu - \frac12 g^2 W^+_\mu W^-_\nu W^+_\mu W^-_\nu + g^2 c_w^2 (Z^0_\mu W^+_\mu Z^0_\nu W^-_\nu - Z^0_\mu Z^0_\mu W^+_\nu W^-_\nu) + \\
&g^2 s_w^2 (A_\mu W^+_\mu A_\nu W^-_\nu - A_\mu A_\mu W^+_\nu W^-_\nu) + g^2 s_w c_w [A_\mu Z^0_\nu (W^+_\mu W^-_\nu - W^+_\nu W^-_\mu) - 2A_\mu Z^0_\mu W^+_\nu W^-_\nu] - g\alpha [H^3 + H\phi^0\phi^0 + 2H\phi^+\phi^-] - \\
&\frac18 g^2\alpha_h \Big[H^4 + (\phi^0)^4 + 4(\phi^+\phi^-)^2 + 4(\phi^0)^2\phi^+\phi^- + 4H^2\phi^+\phi^- + 2(\phi^0)^2 H^2\Big] - gMW^+_\mu W^-_\mu H - \frac12 g \frac{M}{c_w^2} Z^0_\mu Z^0_\mu H - \frac12 ig [W^+_\mu (\phi^0 \partial_\mu\phi^- - \phi^-\partial_\mu\phi^0) - \\
&W^-_\mu (\phi^0\partial_\mu\phi^+ - \phi^+\partial_\mu\phi^0)] + \frac12 g [W^+_\mu (H\partial_\mu\phi^- - \phi^-\partial_\mu H) - W^-_\mu (H\partial_\mu\phi^+ - \phi^+\partial_\mu H)] + \frac12 g \frac{1}{c_w} \Big(Z^0_\mu (H\partial_\mu\phi^0 - \phi^0\partial_\mu H) - ig^{s_w^2}_{c_w} M Z^0_\mu (W^+_\mu\phi^- - W^-_\mu\phi^+) + \\
&igs_w M A_\mu (W^+_\mu\phi^- - W^-_\mu\phi^+) - ig\frac{1-2c_w^2}{2c_w} Z^0_\mu (\phi^+\partial_\mu\phi^- - \phi^-\partial_\mu\phi^+) + igs_w A_\mu (\phi^+\partial_\mu\phi^- - \phi^-\partial_\mu\phi^+) - \frac14 g^2 W^+_\mu W^-_\mu \Big[H^2 + (\phi^0)^2 + 2\phi^+\phi^-\Big] - \\
&\frac14 g^2 \frac{1}{c_w^2} Z^0_\mu Z^0_\mu \Big[H^2 + (\phi^0)^2 + 2(2s_w^2-1)^2\phi^+\phi^-\Big] - \frac12 g^2 \frac{s_w^2}{c_w} Z^0_\mu\phi^0 (W^+_\mu\phi^- + W^-_\mu\phi^+) - \frac12 ig^2\frac{s_w^2}{c_w} Z^0_\mu H (W^+_\mu\phi^- - W^-_\mu\phi^+) + \frac12 g^2 s_w A_\mu \phi^0 (W^+_\mu\phi^- + \\
&W^-_\mu\phi^+) + \frac12 ig^2 s_w A_\mu H (W^+_\mu\phi^- - W^-_\mu\phi^+) - g^2\frac{s_w}{c_w}(2c_w^2-1) Z^0_\mu A_\mu \phi^+\phi^- - g^1 s_w^2 A_\mu A_\mu \phi^+\phi^- - \bar e^\lambda (\gamma\partial + m_e^\lambda) e^\lambda - \bar\nu^\lambda\gamma\partial\nu^\lambda - \bar u^\lambda_j (\gamma\partial + m^\lambda_u) u^\lambda_j - \\
&\bar d^\lambda_j (\gamma\partial + m^\lambda_d) d^\lambda_j + igs_w A_\mu \Big[-(\bar e^\lambda\gamma^\mu e^\lambda) + \frac23 (\bar u^\lambda_j\gamma^\mu u^\lambda_j) - \frac13 (\bar d^\lambda_j \gamma^\mu d^\lambda_j)\Big] + \frac{ig}{4c_w} Z^0_\mu \Big[(\bar\nu^\lambda\gamma^\mu(1+\gamma^5)\nu^\lambda) + (\bar e^\lambda\gamma^\mu(4s_w^2 - 1 - \gamma^5)e^\lambda) + \Big(\bar u^\lambda_j\gamma^\mu\Big(\frac43 s_w^2 - \\
&1-\gamma^5\Big) u^\lambda_j\Big) + \Big(\bar d^\lambda_j\gamma^\mu \Big(1 - \frac83 s_w^2 - \gamma^5\Big) d^\lambda_j\Big)\Big] + \frac{ig}{2\sqrt2} W^+_\mu [(\bar\nu^\lambda\gamma^\mu(1+\gamma^5)e^\lambda) + (\bar u^\lambda_j\gamma^\mu(1+\gamma^5)C_{\lambda\kappa} d^\kappa_j)] + \frac{ig}{2\sqrt2} W^-_\mu \Big[(\bar e^\lambda\gamma^\mu(1+\gamma^5)\nu^\lambda) + \Big(\bar d^\kappa_j C^\dagger_{\lambda\kappa}\gamma^\mu(1+
\end{aligned}
$$

理论力学笔记及随想

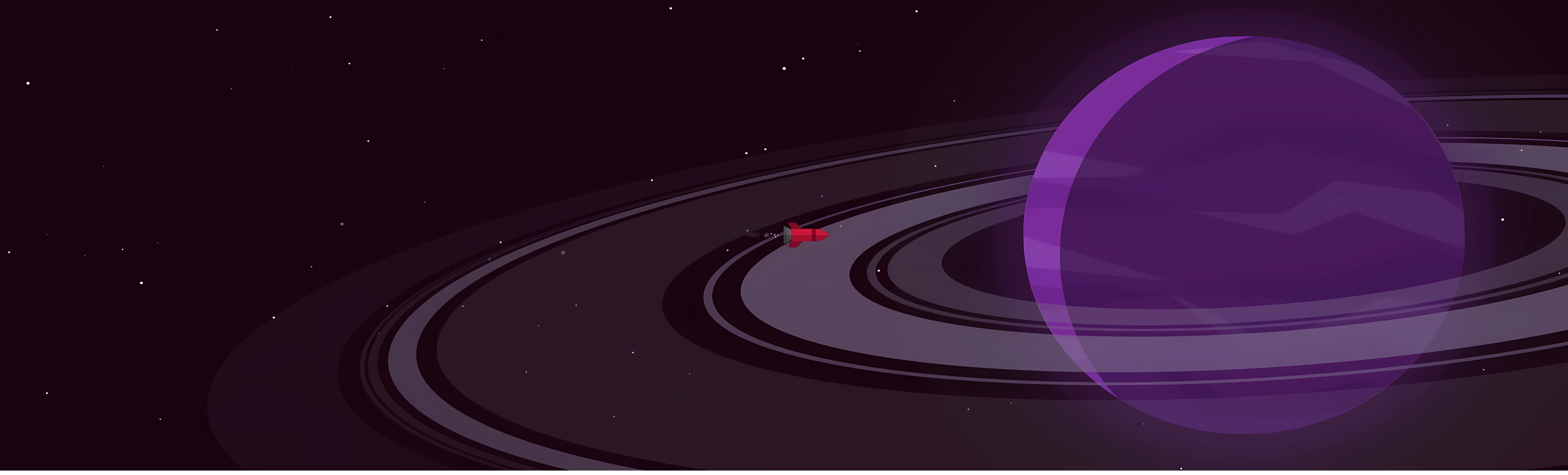
作者：Guotao He

时间：2024-12-1

本文档为个人的笔记和随想整理，虽然本文为了行文方便，同时加深自己的理解，本文假设了读者的存在，但这毕竟只是一个笔记，我不保证此文档完全正确. 如果发现了任何事实错误，希望能及时指出. 同时，严谨性和易懂性永远是对立互补的，本文为了易懂，同时为了便于在实际中使用，难免会牺牲一定的严谨性，同时会略去一些证明和一般成立的条件，还请读者（尤其是数学系的读者）包容.

Not Published

目录



Chapter 1

变分法

1.1 变分法计算法则

在变分运算中，有如下几条简单的计算法则：

- 变量函数有且只有一级变分

$$\delta^2 y = 0$$

- 线性律

$$\delta(\alpha G + \beta F) = \alpha\delta G + \beta\delta F$$

其中 α, β 为常数.

- Leibniz 律

$$\delta(FG) = F\delta G + G\delta F$$

- 复合函数变分

$$\delta F(y, y', x) = \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'$$

这里计算法则同微分类似，只需要简单把微分运算中的“d”换成变分运算中的“δ”即可，需要注意，引起 F 变化的原因不包含自变量 x .

- 同导数交换次序

$$\delta\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x}$$

- 同积分交换次序

$$\delta\int_a^b F\,\mathrm{d}x = \int_a^b \delta F\,\mathrm{d}x$$

另外，对于函数的 Taylor 展开可以类比到变分运算中，如下

$$S[\mathcal{L} + \delta\mathcal{L}] = S[\mathcal{L}] + \delta S[\mathcal{L}] + \frac{1}{2!}\delta^2 S[\mathcal{L}]\cdots$$

1.2 变分法求极值

对于如下泛函 $S[\mathcal{L}]$

$$S[\mathcal{L}] = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \mathcal{L}\left(q_i, \dot{q}_i, t\right)$$

要使得上述泛函取得最值，只需要其一级变分为 0，对上式求变分，可得

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \delta\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i\right) \end{aligned}$$

上式第二项运用分部积分法有

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i\, \mathrm{d}t = \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \delta q_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$$

注意到有 $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$，因此上式第一项为 0，于是有

$$\delta S = \int_{t_2}^{t_1} \delta q_i\, \mathrm{d}t \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right)$$

由于 δq_i 的任意性，要使得上式恒等于 0，则有

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = 0 \tag{1.2.1}$$

上式即为著名的 Euler-Lagrange 方程，简称 E-L 方程.

在导出 E-L 方程时，需要运用到下面的重要引理：

Lemma 1.2.1 (变分学基本引理)**.** 设 $\phi(x)$ 为连续函数，$\eta(x)$ 具有连续的二阶函数，并且满足 $\eta(x)|_{x=x_0} = \eta(x)|_{x=x_1} = 0$. 若对于任意的 $\eta(x)$，有

$$\int_{t_1}^{t_2} \phi(x)\eta(x)\, \mathrm{d}x = 0$$

成立，则必有 $\phi(x) = 0$ 恒成立.

对于上面的 E-L 方程，还可以使用如下更易于理解的方式进行推导.

对于如下泛函 $S[\mathcal{L}]$

$$S[\mathcal{L}] = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$$

令 $Q_i = q_i + \alpha\eta_i$ ，$\dot{Q}_i + \dot{q}_i = \alpha\dot{\eta}_i$，其中 η_i 为任意函数（要求 $\eta_i(t_0) = \eta_i(t_1) = 0$），于是 S 可以看为是 α 的函数，如下

$$S(\alpha) = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \mathcal{L}(q_i + \alpha\eta_i, \dot{q}_i + \alpha\dot{\eta}_i, t)$$

要使得 S 取到极值，则 $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\alpha} = 0$. 注意到 $\frac{\partial(q_i + \alpha\eta_i)}{\partial q_i} = 1$，因此有

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\alpha} = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left(\eta_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} + \dot{\eta}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0$$

对第二项使用分部积分，有

$$\int_{t_!}^{t_2} \mathrm{d}t \left(\dot{\eta}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) = \left[\eta_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \eta_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = -\int_{t_1}^{t_2} \eta_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$$

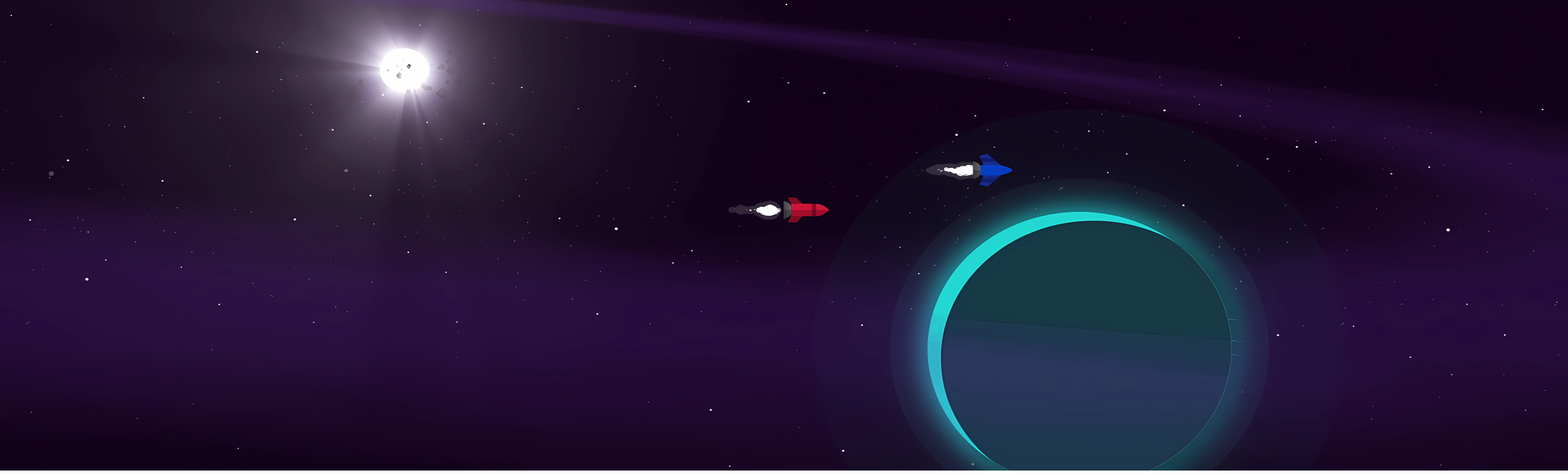
因此有

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\alpha} = \int_{t_1}^{t_2} \eta_i \,\mathrm{d}t \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0$$

由于 η_i 的任意性，因此有

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

即之前推导的 E-L 方程 (1.2.1).



Chapter 2

作用量与运动方程

2.1 虚功原理和 d'Alembert 原理

若一个体系受力平衡，则对于某一满足运动方程和约束方程的任意的小位移 $\delta\boldsymbol{x}$，有：

$$\sum_i \boldsymbol{F}_i \delta\boldsymbol{x}_i = 0$$

现在,我们将体系所受到的力 $\boldsymbol{F}_i$ 分为**主动力** $\boldsymbol{F}_i^a$ 和**约束力** $\boldsymbol{F}_i^c$,并且假设约束力不做功,即 $\sum_i \boldsymbol{F}_i^c = 0$,因此有：

$$\sum_i \boldsymbol{F}_i^a \delta\boldsymbol{x}_i = 0$$

这个结论被称为静力学中的**虚功原理**.

类似的，对于非静力学，我们可以引入所谓的“惯性力”从而可以使用静力学的方法来进行分析. 因此，上面的虚功原理可以改写为：

Theorem 2.1.1 (d'Alembert 原理). *在一个有完整约束的力学体系中，对于一个满足运动方程和约束方程的任意的小位移 $\delta\boldsymbol{x}$，其主动力 $\boldsymbol{F}_i^a$ 满足：*

$$\sum_i (\boldsymbol{F}_i^a - \dot{\boldsymbol{q}})\delta\boldsymbol{x}_i = 0$$

这个原理可以看成是分析力学的一个基本原理.

2.2 从牛顿定律到 Lagrange 量

现在假定我们仅仅考虑完整约束的力学体系. 我们选取 n 个独立的广义坐标 q_i，则 $\boldsymbol{x}_i$ 可以写成这 n 个广义坐标和时间[1]的函数.

$$\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{x}_i(q_1, q_2, \cdots, q_n, t)$$

因此，在某一时刻 t，任意小位移 $\delta\boldsymbol{x}_i$ 可以写为[2]：

$$\delta\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{x}_i(\delta q_1, \delta q_2, \cdots, \delta q_n, t)$$

[1]很显然，q_i 到 $\boldsymbol{x}_i$ 的映射关系可能随时间变化.

[2]这里在计算任意小位移的时候不需要将 t 改为 δt，显然在某一时刻 t 的任意小位移与 t 的小变化无关. 这里与微分不完全相同，需要注意区分.

对于主动力，有：

$$\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{a}}\delta\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}} = \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{a}}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}}}{\partial q_j}\delta q_j = Q_j\delta q_j$$

这里我们定义**广义力**：$Q_j = \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{a}}\frac{\partial\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}}}{\partial q_j}$. 并且这里使用了 Einstein 求和约定，下文中在没有歧义和特殊说明的情况下默认使用 Einstein 求和约定.

对于动量的关于时间的导数，有：

$$\dot{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{i}}\delta\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}} = m\ddot{\boldsymbol{x}}\cdot\delta\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}} = m\ddot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{i}}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}}}{\partial q_j}\delta q_j \tag{2.2.1}$$

注意到：

$$\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{i}} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}}}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}}}{\partial t}$$

因此有：$\frac{\partial\dot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{i}}}{\partial\dot{q}_j} = \frac{\partial\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}}}{\partial q_j}$. 带入 (2.2.1)，有：

$$\begin{aligned} m\ddot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{i}}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}}}{\partial q_j} &= m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{i}}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}}}{\partial q_j}\right) - m\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}}}{\partial q_j} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial}{\partial\dot{q}_j}\left(\frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{2}}\right)\right) - m\dot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{i}}\frac{\partial\dot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{i}}}{\partial q_j} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \end{aligned}$$

因此，由 d'Alembert 原理（定理 2.1.1），有：

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j\right)\delta q_j = 0$$

由于 δq_i 的任意性，因此有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$

这个式子便是 **Eular-Lagrange** 方程（的一种形式）. 对于广义力，假设其因某一个保守势，则有：

$$Q_j = \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{a}}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}}}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}}}\frac{\partial\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}}}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

因此，前面的 Eular-Lagrange 方程可以改写为：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} = 0, \quad \mathcal{L} = T - V$$

这便是我们常见的 Eular-Lagrange 方程和对应的 Lagrange 量.

2.3 Hamilton 原理

在上面的讨论中我们从牛顿定律得到了 Eular-Lagrange 方程以及对应的 Lagrange 量. 下面我们通过另外的方法来得到这一定理，并且这一方法更通用且更能体现对称性在物理学中的重要性.

如果一个力学体系可以完全由一系列变量 $q_1, q_2, \cdots, q_i$ 来描述，则称这一组变量为该力学体系的广义坐标. 一个力学体系的所有广义坐标 q_i 构成一个“空间”，称为该力学体系的**位形空间**. 需要注意，力学体系的位形空间一般不是一个平直的空间，而且其拓扑结构往往也不是平庸的. 一个力学体系的所有广义速度 $\dot{q}_i$ 也构成一个“空间”. 对于位形空间中的一点，其所有的广义速度构成的“空间”称为位形空间（流形）的**切丛**[3].

在整个经典力学乃至整个物理学中，有如下极其重要的定理[4]

[3]这里与微分几何有很大关联，更详细的内容需要查阅微分几何有关书籍

[4]“Hamilton 原理”也被称为“最小作用量原理”

Theorem 2.3.1 (Hamilton 原理)**.** 任意力学体系中都存在一个与运动相关的量，称为**最小作用量**，记作 S，其为一个 *Lorentz* 标量. 如果一个力学体系在 t_1 和 t_2 时刻分别由广义坐标 $q_i^{(1)}$，$q_i^{(2)}$ 描写，则作用量 S 可以描述为在这两个位形中各种可能轨道的泛函.

$$S=\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\mathcal{L}(q_i,\dot{q}_i,t)$$

这里的被积函数 $\mathcal{L}$ 被称为 *Lagrange* 量. 该力学体系从 t_1 到 t_2 的实际轨迹满足作用量 S 取极值.[a]

[a]由于自由粒子的质量为正值，故一般而言作用量 S 取的是最小值.

要得到一个特定力学体系的作用量，最常用的方法是从体系的对称性出发，从而构建出相应的 Lorentz 标量. 从最小作用量出发，要求解出力学体系的运动方程，则可以通过前文 §1.1 的变分法得到.

一旦给定了一个力学体系的 Lagrange 量（作用量），根据 Hamilton 原理和变分法可知，体系的运动方程由 E-L 方程(1.2.1) 决定. 因此，经典力学体系的性质完全由 Lagrange 量（作用量）决定，其包含了体系所有的力学信息.

我们定义该力学体系中与某个广义坐标 q_i 共轭的**广义动量**[5] p_i:

$$p_i=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\tag{2.3.1}$$

因此，前文的 E-L 方程 (1.2.1) 又可以写为:

$$\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i}\tag{2.3.2}$$

由于 (2.3.2) 与牛顿力学中的方程类似，方程的右边又被称为**广义力**.

2.4 相对论下自由粒子的运动方程

由于作用量是一个 Lorentz 标量，在相对论中我们所能想到的最简单的 Lorentz 标量就是世界线长度，因此，对于一个相对论下的自由粒子，其作用量可以写成如下形式

$$S=\alpha\int\mathrm{d}s$$

其中 $ds=\sqrt{\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x_\mu}$ 为世界线线元，α 则是一个常量. 为了兼容传统的牛顿力学，可以得到[6] $\alpha=-mc$，因此有

$$S=-mc\int\mathrm{d}s$$

[5]又称为正则动量

[6]此处可以参考 Landau 的《场论》第二章，之后再补充

对上式做变分，有

$$
\begin{aligned}
\delta S &= -mc\int \delta(\mathrm{d}s) = -mc\int \mathrm{d}\tau\,\delta\left(\sqrt{\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}\tau}}\right) \\
&= -mc\int \mathrm{d}\tau\,\delta\big(\sqrt{u_\mu u^\mu}\big) \quad (\text{令 } u_\mu = \frac{\mathrm{d}x_m u}{\mathrm{d}\tau}\text{、} u^\mu = \frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}\tau}) \\
&= -mc\int \mathrm{d}\tau\,\frac{u_\mu \delta u^\mu}{\sqrt{u_\mu u^\mu}} \\
&= -mc\int \mathrm{d}\tau\,\frac{u_\mu}{\sqrt{u_\mu u^\mu}}\frac{\mathrm{d}\delta x^\mu}{\mathrm{d}\tau} \quad (\delta u^\mu = \delta\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}\delta x^\mu}{\mathrm{d}\tau}) \\
&= mc\int \mathrm{d}\tau\,\delta x^\mu \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{u_\mu}{\sqrt{u_\mu u^\mu}} - mc\left[\delta x^\mu \frac{u_\mu}{\sqrt{u_\mu u^\mu}}\right]_{start}^{finish}
\end{aligned}
$$

上式由于为固定起点到终点的变分，因此第二项恒为 0. 因此可以得到自由粒子的运动方程为

$$
\frac{\mathrm{d}^2 x_\mu}{\mathrm{d}\tau^2} = 0 \quad (\sqrt{u_\mu u^\mu} = c) \tag{2.4.1}
$$

也就是匀速直线运动.

2.5 相对论下与标量场相互作用粒子的运动方程

如果一个外场本身是一个无量纲的 Lorentz 标量（也就是标量场[7]），一个相对论性粒子与其相互作用的作用量可以写成[8]

$$
S = -mc\int \mathrm{d}s\, e^{\Phi(x)}
$$

同样，对上式做变分

$$
\begin{aligned}
\delta S &= -mc\int \mathrm{d}\tau\,\delta\big(e^\Phi\sqrt{u_\mu u^\mu}\big) \\
&= -mc\int \mathrm{d}\tau\left[\sqrt{u_\mu u^\mu}e^\Phi \delta\Phi + \frac{e^\Phi u_\mu \delta u^\mu}{\sqrt{u_\mu u^\mu}}\right] \\
&= -mc\int \mathrm{d}\tau\left[\sqrt{u_\mu u^\mu}e^\Phi \frac{\partial\Phi}{\partial x^\mu}\delta x^\mu + \frac{e^\Phi u_\mu}{\sqrt{u_\mu u^\mu}}\frac{\mathrm{d}\delta x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\right]
\end{aligned}
$$

对第二项使用分部积分并同样由于为固定起点和终点的变分，因此丢掉边界项，得到

$$
\int \mathrm{d}\tau\,\frac{e^\Phi u_\mu}{\sqrt{u_\mu u^\mu}}\frac{\mathrm{d}\delta x^\mu}{\mathrm{d}\tau} = -\int \delta x^\mu\,\mathrm{d}\tau\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{e^\Phi u_\mu}{\sqrt{u_\mu u^\mu}}
$$

带入回原式，由变分学基本引理，可得

$$
c^2 e^\Phi \frac{\partial\Phi}{\partial x^\mu} = \frac{\mathrm{d}(e^\Phi u_\mu)}{\mathrm{d}\tau} = e^\Phi\left(\frac{\mathrm{d}^2 x_\mu}{\mathrm{d}\tau^2} + \frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial\Phi}{\partial x_\nu}\frac{\mathrm{d}x_\nu}{\mathrm{d}\tau}\right)
$$

进一步化简，注意到 $\mathrm{d}s = c\,\mathrm{d}\tau$，可得

$$
\frac{\mathrm{d}^2 x_\mu}{\mathrm{d}s^2} + \frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}s}\frac{\partial\Phi}{\partial x_\nu}\frac{\mathrm{d}x_\nu}{\mathrm{d}s} = \frac{\partial\Phi(x)}{\partial x^\mu} \tag{2.5.1}
$$

此即为相对论性粒子与标量场相互作用下的运动方程.

[7] 比如高能物理中的 Higgs 场

[8] 也许这么写是为了在非相对论极限下退化成经典的势能，我不太确定

2.6 非相对论极限与弱场近似

对于一个在标量场中的粒子，其作用量为：

$$S = -mc\int \mathrm{d}s\, e^{\Phi(x)} = -mc^2\int \mathrm{d}t\, \sqrt{1-\frac{\boldsymbol{v}^2}{c^2}}e^{\Phi(\boldsymbol{x},t)}$$

因此其 Lagrange 量为：

$$\mathcal{L} = -mc^2\sqrt{1-\frac{\boldsymbol{v}^2}{c^2}}e^{\Phi(\boldsymbol{x},t)}$$

若粒子速度 $v \ll c$ 且标量场 $\Phi(\boldsymbol{x},t) = \frac{V(\boldsymbol{x},t)}{mc^2}$ 同时 $V(\boldsymbol{x},t) \ll mc^2$，分别对 $\sqrt{1-\frac{\boldsymbol{v}^2}{c^2}}$ 和 $e^{\Phi(\boldsymbol{x},t)}$ 展开，有：

$$\sqrt{1-\frac{\boldsymbol{v}^2}{c^2}} \approx 1-\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}, \quad e^{\Phi(\boldsymbol{x},t)} \approx 1+\frac{V}{mc^2}$$

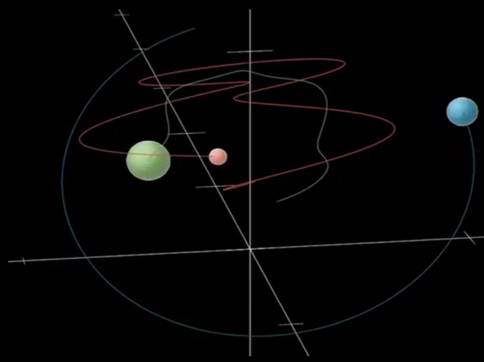
因此：

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &\approx -mc^2\left(1-\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right)\left(1+\frac{V}{mc^2}\right) \\
&= -mc^2\left(1-\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}+\frac{V}{mc^2}-\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\frac{V}{mc^2}\right) \\
&= -mc^2\left(1-\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}+\frac{V}{mc^2}\right) \quad \left(\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\frac{V}{mc^2}\ \text{为更高阶的小量，略去.}\right) \\
&= \frac{1}{2}mv^2 - V - mc^2
\end{aligned}$$

上面式子中 mc^2 为常量，可略去. 因此，在非相对论极限和弱场近似下的在标量场中的粒子的 Lagrange 量为：

$$\mathcal{L} = T - V, \quad T = \frac{1}{2}mv^2$$

可见，这一 Lagrange 量与我们所熟悉同牛顿运动定律导出的 Lagrange 量相同.



“Since Newton, mankind has come to realize that the laws of physics are always expressed in the language of differential equations.”

——Steven Strogatz

Chapter 3

对称性与守恒律

3.1 时间平移不变性与能量守恒

对于一个力学系统，如果其 Lagrange 量不显含时间[1]，则有

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\ddot{q}_i$$

同时，注意到

$$\frac{\mathrm{d}p_i\dot{q}_i}{\mathrm{d}t}=\dot{p}_i\dot{q}_i+p_i\ddot{q}_i$$

根据前文 (2.3.1) 和 (2.3.2) 可知，上述两个表达式右边相等，因此，构造

$$E=p_i\dot{q}_i-\mathcal{L}$$

于是有 $\dot{E}=0$，即 E 守恒，它就是系统的能量.

3.2 空间平移不变性与动量守恒

下面我们考察直角坐标系下的空间平移不变性，若一个力学系统的 Lagrange 量在如下变换中保持不变

$$\boldsymbol{x_i}\to\boldsymbol{x_i}+\boldsymbol{x_0}$$

因此，有

$$\sum_i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\boldsymbol{x_i}}=0$$

根据前文 (2.3.2) 可知，有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t}=0,\quad \boldsymbol{P}=\sum_i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{i}}}=\sum_i\boldsymbol{p_i}$$

即空间平移不变性导致系统动量守恒.

在前文的讨论中，我们是在直角坐标系下进行的. 我们看到，如果系统的 Language 量在直角坐标下具有空间平移不变性，则该力学系统的动量守恒. 进一步推广，对于任意广义坐标 q_i. 如果力学系统的 Lagrange 量不显含某一广义坐标 q_1，则根据前文 (2.3.2) 显然可知该广义坐标 q_i 所共轭的广义动量 p_i 一定守恒. 我们称力学系统的 Lagrange 量中不出现的广义坐标为**循环坐标**. 因此，我们可以说**循环坐标所对应的广义动量是守恒的**.

[1]这里不显含时间的意思是其 Lagrange 量不含有 t，但可以出现关于 t 的导数.

3.3 空间转动不变性与角动量守恒

下面我们考察直角坐标系下的空间转动不变性. 我们考虑绕空间中某轴旋转的一个角度 $\delta\boldsymbol{\phi}$，因此位矢和速度的变换如下：

$$\boldsymbol{x_i} \to \boldsymbol{x_i} + \delta\boldsymbol{\phi} \times \boldsymbol{x_i}, \quad \boldsymbol{v_i} \to \boldsymbol{v_i} + \delta\boldsymbol{\phi} \times \boldsymbol{x_i}$$

因此：

$$\delta\boldsymbol{x_i} = \delta\boldsymbol{\phi} \times \boldsymbol{x_i}, \quad \delta\boldsymbol{v_i} = \delta\boldsymbol{\phi} \times \boldsymbol{v_i}$$

于是，Lagrange 量在变换后的差值为：

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L} &= \sum_i \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\boldsymbol{x_i}} \delta\boldsymbol{x_i} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\boldsymbol{v_i}} \delta\boldsymbol{v_i} \right) \\
&= \sum_i \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\boldsymbol{x_i}} \cdot (\delta\boldsymbol{\phi} \times \boldsymbol{x_i}) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\boldsymbol{v_i}} \cdot (\delta\boldsymbol{\phi} \times \boldsymbol{v_i}) \right] \\
&= \delta\boldsymbol{\phi} \cdot \sum_i \left[\boldsymbol{x_i} \times \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\boldsymbol{x_i}} + \boldsymbol{v_i} \times \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\boldsymbol{v_i}} \right] \\
&= \delta\boldsymbol{\phi} \cdot \sum_i (\boldsymbol{x_i} \times \dot{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{i}} + \dot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{i}} \times \boldsymbol{p_i}) \\
&= \delta\boldsymbol{\phi} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\sum_i \boldsymbol{x_i} \times \boldsymbol{p_i} \right)
\end{aligned}$$

如果 Lagrange 量满足此轴的空间转动不变性，那么上式差值为 0. 由于 $\delta\boldsymbol{\phi}$ 的任意性，因此有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = 0$$

即 $\boldsymbol{L}$ 守恒. 其中 $\boldsymbol{L} = \sum_i \boldsymbol{x_i} \times \boldsymbol{p}$ 正是我们所熟悉的角动量. 因此，空间转动不变性导出了角动量守恒.

3.4 Noether 定理

Theorem 3.4.1 (Noether 定理)**.** *Lagrange 量的一个对称性 ⇔ 一个守恒量*

对于粒子物理[2]，为了保证在变换后的动力学性质一样，我们要求其作用量不变，即变换后的 Lagrange 量相比变化前的 Lagrange 量多一个对时间的全导数，因为当 $\mathcal{L} \to \mathcal{L} + \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t}$ 时，有：

$$\begin{aligned}
\delta S' &= \int \mathrm{d}t \left(\mathcal{L} + \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t} \right) \\
&= \delta S + \int \mathrm{d}t \left(\frac{\mathrm{d}\delta G}{\mathrm{d}t} \right) \\
&= \delta S + \int \mathrm{d}t \, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial G}{\partial q_i} \delta q_i \\
&= \delta S + \left[\frac{\partial G}{\partial q_i} \delta q_i \right]_{t_1}^{t_2} \\
&= \delta S
\end{aligned}$$

[2] 与之相对应的场论中，场论中的 Noether 定理较为复杂，之后在进行补充.

也就是若要让变换后运动学方程不变，则要求：

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t}$$

由于：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t} = \delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\delta\dot{q}_i \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\right)\delta q_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\delta\dot{q}_i\end{aligned}$$

利用 Leibniz 律，我们有：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\delta q_i - G\right) = 0$$

因此我们可以定义一个不随时间变化的守恒量 J：

$$J = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\delta q_i - G \tag{3.4.1}$$

3.4.1 空间平移不变性

现在我们利用 Noether 定理来推导我们所常见的一些守恒量. 对于一个常质量自由粒子，其 Lagrange 量为[3]：

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{q}}^2$$

显然 Lagrange 量不依赖与 $\boldsymbol{q}$，因此此 Lagrange 量在空间平移变换 $\boldsymbol{q} \to \boldsymbol{q} + \boldsymbol{a}$ 不变（$\delta\mathcal{L} = 0$），因此，对应的守恒量为：

$$J_{trans} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\boldsymbol{q}}}\boldsymbol{a} = m\dot{\boldsymbol{q}}\boldsymbol{a}$$

由于 $\boldsymbol{a}$ 的任意性，我们可以得到 $\boldsymbol{p} = m\dot{\boldsymbol{q}}$ 守恒. 即我们所常见的动量守恒.

3.4.2 时间平移不变性

现在我们来考虑时间平移不变性. 假设一个无穷小的时间平移不变性 $t \to t + \epsilon$，那么有：

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial t}\epsilon + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\frac{\partial\dot{q}_i}{\partial t}\epsilon + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}\epsilon = \frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}t}\epsilon$$

因此，我们可以取 $G = \mathcal{L}$，使得 $\delta\mathcal{L} = \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t}$. 注意到在变换一段小时间 ϵ 后，其 q_i 变化了 $\dot{q}_i$，即 $\delta q_i = \dot{q}_i$，因此，对应的守恒量为：

$$J_{time} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\dot{q}_i - \mathcal{L} = p_i\dot{q}_i - \mathcal{L}$$

一般我们把这个守恒量称作 **Hamilton 量**，一般情况下其代表了系统的总能量. 比如对于一个在保守势场中的粒子，其 Lagrange 为 $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - V(x)$，那么其 Hamilton 量为：

$$\mathcal{H} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}}\dot{q} - \mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + V(x)$$

可见此 Hamilton 量就是粒子的能量，其守恒便对应了能量守恒. 同时，我们一般把从 Lagrange 量到 Hamilton 量的变换称作 **Legendre 变换**.

[3]可以从前面的 §2.4 做非相对论极限的近似得出.

3.4.3 空间转动不变性

再次考虑对于一个常质量自由粒子，其 Lagrange 量为 $\mathcal{L}=\frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{q}}^2$，不依赖与 $\boldsymbol{q}$，因此考虑一个绕轴矢量为 $\boldsymbol{a}$ 的无穷小旋转[4]：$q_i\to q_i+\epsilon_{ijk}q_ja_k$，因此 $\delta q_i=\epsilon_{ijk}q_ja_k$. 由于在此变换下 Lagrange 量不变（$\delta\mathcal{L}=0$），因此其对应的守恒量是：

$$J_{rot}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i}\epsilon_{ijk}q_ja_k=(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q})\cdot\boldsymbol{a}$$

由于 $\boldsymbol{a}$ 的任意性，我们可以得到 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q}$ 守恒，即我们常见的角动量守恒.

3.4.4 Boost 不变性

同样我们考虑一个常质量自由粒子的 Lagrange 在 Boost 变换下的不变性. 在低速状态下的 Boost 变换即所谓的 Galileo 变换[5]. 即 $q\to q+vt$，$\dot{q}\to\dot{q}+v$，其中 v 为某个常值速率. 因此：

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L}&=\frac{1}{2}m(\dot{q}+v)^2-\frac{1}{2}m\dot{q}^2\\&=m\dot{q}v+\frac{1}{2}mv^2\\&\approx m\dot{q}v\end{aligned}$$

上式计算中注意到所做的 Boost 变换为一个无穷小变换，也就是 v 为无穷小量，因此在最后舍去了 v 的高阶无穷小量. 上式等于下面函数的全导数:

$$G=mqv$$

因此，我们可以得到对应的守恒量：

$$J_{boost}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}}\delta q-G=pvt-mqv$$

除去 v 后，我们得到：

$$\tilde{J}_{boost}=pt-mq$$

这个守恒量并不常见，其依赖于初始值 t 的选取，但我们可以注意到，若选取合适的初始值使其为 0，那么其意味着此守恒量一直为 0. 其意味着**质心运动定理**. 也就是我们可以通过一个合适的 Galileo 变换使得其质心速度始终为 0.

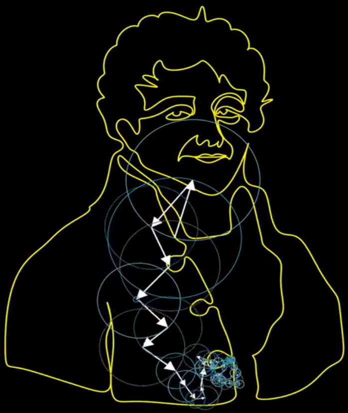
作为总结，我们可以得到如下关系：

- 空间平移不变性 $\Rightarrow$ 动量守恒
- 时间平移不变性 $\Rightarrow$ 能量守恒
- 空间转动不变性 $\Rightarrow$ 角动量守恒
- Boost 不变性 $\Rightarrow$ $pt-mq$ 守恒（质心运动定理）

Noether 定理告诉了我们为什么上面这些守恒量（或定理）在物理学中如此常见. 只要我们有此类对称性，我们便可以得到这类守恒量. Noether 定理建立了对称性与守恒量之间的关系，并提供了一个至关重要的思想：**描述自然的物理量等同于其对应对称性的的生成元**.

[4]这里为了简便计算使用指标表示法，在下面的计算中也可以感受到指标表示法的简洁性和优越性.

[5]与之相对的便是高速下的 Lorentz 变换，其在非相对论极限下便是 Galileo 变换.



"Mathematics compares the most diverse phenomena and discovers the secret analogies that unite them."

——Joseph Fourier

Chapter 4
随想

4.1 Lagrange 量的唯一性

4.1.1 Goldstein 中的原题

在 Goldstein 的理论力学习题中有如下一道题

Question 4.1.1. 一质量为 m 的质点作一维运动，其 Lagrange 量为

$$\mathcal{L} = \frac{m^2\dot{x}^4}{12} + m\dot{x}^2V - V^2$$

式子中 V 是 x 的某一可微函数。求 $x(t)$ ，并描述其物理意义。

Solution.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} &= \frac{1}{3}m^2\dot{x}^3 + 2m\dot{x}V \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} &= m^2\dot{x}^2\ddot{x} + 2m\ddot{x}V + 2m\dot{x}^2\frac{\partial V}{\partial x} \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} &= (m\dot{x} - 2V)\frac{\partial V}{\partial x}
\end{aligned}$$

上式带入 E-L 方程，可得

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} &= 0 \\
-2(T+V)\left(m\ddot{x} + \frac{\partial V}{\partial x}\right) &= 0
\end{aligned}$$

其中 $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$.

由于 $(T+V)$ 等于能量为定值，因此上面方程等价于

$$m\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

即牛顿体系下经典的运动方程.

另外，我们还可以构造其 Hamilton 量，对上面 Lagrange 量做 Legendre 变换，有

$$\mathcal{H} = p\dot{q} - \mathcal{L} = (T+V)^2$$

可见其 Hamilton 量为能量 E 的平方. □

4.1.2 借助 Hamilton 量构造等价的 Lagrange 量

从上面的例题中可以看出，满足 $m\ddot{x} = -\partial_x V$ 的 Lagrange 量不单是 $\mathcal{L} = T - V$，还存在有其他的等价的形式[1]. 由前文的 Hamilton 量为能量 E 的平方我们可以猜想，要构造其他的等价的 Lagrange 量，只需要让 Hamilton 量为能量 E 的不同次方即可.

我们假设：

$$\mathcal{H} = (T+V)^n, \quad \mathcal{L} = \sum_{i=0}^{n} a_i T^i V^{n-i}$$

则其广义动量为（注意到 $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}$）：

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \sum_{i=0}^{n} \left[i \cdot a_i V^{n-i} T^{i-1} m\dot{q} \right]$$

对上面的 Lagrange 量做 Legendre 变换，有：

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= p\dot{q} - \mathcal{L} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \left[i a_i m \dot{q}^2 V^{n-i} T^{i-1} - a_i T^i V^{n-i} \right] \\
&= \sum_{i=0}^{n} \left[(2i-1) a_i T^i V^{n-i} \right]
\end{aligned}$$

又由于：

$$\mathcal{H} = (T+V)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i T^i V^{n-i}$$

因此有：

$$a_i = \frac{C_n^i}{2i-1}$$

于是，我们可以得到一系列的等价的 Lagrange 量：

- 当 $n=1$ 时，$\mathcal{L} = T - V$
- 当 $n=2$ 时，$\mathcal{L} = \frac{1}{3}T^2 + 2TV - V^2$
- 当 $n=3$ 时，$\mathcal{L} = \frac{1}{5}T^3 + T^2 V + 3TV^2 - V^3$

不难验证，上面的式子都等价于牛顿体系下经典的运动方程.

4.1.3 借助牛顿第二定律构造等价的 Lagrange 方程

在最开始的例题中，通过 Lagrange 方程所得到的运动学方程为：

$$2(T+V)(m\ddot{x} + \frac{\partial V}{\partial x}) = 0$$

因此，我们猜测，通过在牛顿第二定理（$m\ddot{x} + \partial_x V = 0$）乘上一些守恒量后反解出对应的 Lagrange 量便可以得到其他等价的 Lagrange 量. 根据例题的形式，我们可以猜测其他等价的运动学方程满足：

$$c_1 (T+V)^{n-1} (m\ddot{x} + \frac{\partial V}{\partial x}) = c_i (m\ddot{q} + V') \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i T^i V^{n-i-1} = 0$$

[1]那这里自然会有一个问题，即为什么经典的 Lagrange 量都选取为 $T-V$ 的形式？笔者认为是因为其形式简单且易从经典的矢量力学中得到.

其中 c_1、n 均为常数. 由于直接反解出对应的 Lagrange 量较为复杂[2]. 因此我们同样通过待定系数法来得到对应的 Lagrange 量. 假设

$$\mathcal{L} = \sum_{i=0}^{n} a_i T^i V^{n-i}$$

因此有（注意到 $\partial_{\dot{q}} T = \partial_{\dot{q}} \frac{1}{2} m\dot{q}^2 = m\dot{q}$）：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} &= \sum_{i=0}^{n} i\dot{a}_i m\dot{q} T^{i-1} V^{n-i} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} &= \sum_{i=0}^{n} i a_i m\big[\dot{q} T^{i-1}(n-i)V^{n-i-1}V'\dot{q} + \ddot{q} T^{i-1} V^{n-i} + \dot{q} V^{n-i}(i-1)T^{i-2} m\dot{q}\ddot{q}\big] \\
&= \sum_{i=0}^{n} i a_i m\big[(n-i)\dot{q}^2 V' T^{i-1} V^{n-i-1} + (2i-1)\ddot{q} T^{i-1} V^{n-i}\big] \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} &= \sum_{i=0}^{n} a_i T^i (n-i) V^{n-i-1} V'
\end{aligned}$$

上面的 V' 表示 $\partial_x V$. 带入 E-L 方程，得到运动学方程为：

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} =& \sum_{i=0}^{n}\big[i a_i m\big[(n-i)\dot{q}^2 V' T^{i-1} V^{n-i-1} + (2i-1)\ddot{q} T^{i-1} V^{n-i}\big] - a_i T^i (n-i) V^{n-i-1} V'\big] \\
=& \sum_{i=0}^{n}\big[a_i(2i-1)(n-i)V' T^i V^{n-i-1} + a_i(2i-1) i m\ddot{q} T^{i-1} V^{n-i}\big] \\
=& a_0(2\cdot 0-1)\cdot 0\cdot m\ddot{q} T^{-1} V^n + a_n(2n-1)(n-n)V' T^n V^{-1} \\
&+ \sum_{i=0}^{n-1}\big[a_i(2i-1)(n-i)V' T^i V^{n-i-1} + a_{i+1}(2i+1)(i+1)m\ddot{q} T^i V^{n-i-1}\big] \\
=& \sum_{i=0}^{n-1}[a_i(n-i)(2i-1)V' + a_{i+1}(2(i+1)-1)(i+1)m\ddot{q}]T^i V^{n-i-1}
\end{aligned}$$

上面的运动学方程中如果我们想继续化简从而凑出 $(m\ddot{q} + V')$ 的因子，就要求有：

$$a_i(2i-1)(n-i) = a_{i+1}[2(i+1)-1](i+1)$$

记 $b_i = a_i(2i-1)$，因此有 $b_i(n-i) + b_{i+1}(i+1)$，因此：

$$b_i = \frac{b_{i-1}}{n} = \frac{(1\cdot 2)b_{i-2}}{n(n-1)}\cdots$$

因此 $b_i = C_n^i$，$a_i = \frac{C_n^i}{2i-1}$. 因此

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} &= \sum_{i=0}^{n-1} C_n^i (n-i)(m\ddot{q} + V')T^i V^{n-i-1} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} n(m\ddot{q} + V')C_{n-1}^i T^i V^{n-i-1} \\
&= n(m\ddot{q} + V')\sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i T^i V^{n-i-1} \\
&= n(m\ddot{q} + V')(T+V)^{n-1}
\end{aligned}$$

[2]这类问题也被称作“变分问题的反问题”，参考梅凤翔《微分方程的分析力学方法》.

此形式与我们所假设的形式相同，因此，我们可以得到我们所假设的运动方程的常数 $c_1 = n$，其对应的 Lagrange 量为：

$$\mathcal{L} = \sum_{i=0}^{n} a_i T^i V^{n-i}, \quad a_i = \frac{C_n^i}{2i-1}$$

这与我们借助 Hamilton 量构造的等价的 Lagrange 量相同[3].

[3]通过 Hamilton 量得到的 Lagrange 量的过程严格来说其实并不能说明其等价，但通过解 E-L 方程得到运动学方程的方式则可以严格说明其等价.