线性代数笔记

Guotao He

2024-10-24

目录

1 计算技巧

1.1 升阶法

“升阶法”是在矩阵计算中在原有的矩阵上增加一行 1 一列 0（或增加一列 0 一行 1），增加之后方便消除其他行和列，最终达到简化计算的目的.

Exercise 1.I：对于矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix}$$

其满足 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=3$，求 k.

Solution：首先，我们先构造矩阵 $\bar{\boldsymbol{A}}$：

$$\bar{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & k & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix}$$

由于矩阵 $\bar{\boldsymbol{A}}$ 的第一列只有第一行为 1，其余都为 0，第一列中第一行的元素无法通过下面行的线性叠加得到，因此 $\operatorname{rank}\left(\bar{\boldsymbol{A}}\right)=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})+1=4$.

为了消去每行中的 1 从而简化计算，我们做如下变换：

$$\bar{\boldsymbol{A}}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & k-1 & & & \\ -1 & & k-1 & & \\ -1 & & & k-1 & \\ -1 & & & & k-1 \end{pmatrix}$$

这里我们希望能将第一行的 1 消掉，因此我们需要用第一行减去第二行到第四行的 $1/(k-1)$ 倍，因此我们需要先验证 $(k-1)$ 是否不为 0. 当 $k=1$ 时，显然第二行到第四行完全相同，因此此时 $\operatorname{rank}\left(\bar{\boldsymbol{A}}\right)=2\neq 4$，不符合题意，因此 $k\neq 1$，因此，我们进行如下变换：

$$\bar{\boldsymbol{A}}\to\begin{pmatrix} 1+\frac{4}{k-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & k-1 & & & \\ -1 & & k-1 & & \\ -1 & & & k-1 & \\ -1 & & & & k-1 \end{pmatrix}$$

此时，若要想 $\operatorname{rank}\left(\bar{A}\right)=4$，则需要第一行全为 0，即

$$1+\frac{4}{k-1}=0$$

解得 $k=-3$.

1.2 特殊行列式计算

Exercise 1.II：计算下面矩阵的行列式：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_1 & * & \dots & * \\ & a_2 & \dots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_n \end{pmatrix}$$

Solution：

$$\det \boldsymbol{A}=\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 a_2 \dots a_n$$

Remark：这里计算的是上三角矩阵，对于下三角矩阵，结果相同.

Exercise 1.III：计算下面矩阵的行列式：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} x & a & \dots & a \\ a & x & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \dots & x \end{pmatrix}$$

Solution：从第二列开始每一列加到第一列，并提出公因式：

$$\det \boldsymbol{A}=(x+(n-1)a)\cdot \begin{vmatrix} 1 & a & a & \dots & a \\ 1 & x & a & \dots & a \\ 1 & a & x & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a & a & \dots & a \end{vmatrix}$$

从第二行开始分别减去第一行：

$$\det \boldsymbol{A}=(x+(n-1)a)\cdot \begin{vmatrix} 1 & a & a & \dots & a \\ 0 & x-a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x-a \end{vmatrix} = [x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$$

Exercise 1.IV：计算下面矩阵的行列式（Vandermonde 行列式）：

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}(x_0,x_1,\dots,x_n)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0 & x_1 & \dots & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \dots & x_n^n \end{pmatrix}$$

Solution：

$$\det \boldsymbol{V}=\prod_{0\le j\le i\le n}(x_i-x_j)$$

Remark：这里我们可以从代数的角度来得到 *Vandermonde* 行列式的一些信息：对于 $\forall i, j$，当 $x_i = x_j$ 时，显然有 $\det \boldsymbol{V} = 0$；而当 $x_i \neq x_j$ 时，显然有 $\det \boldsymbol{V} \neq 0$. 因此 $(x_i - x_j)$ 是 *Vandermonde* 行列式的一个因式.

Exercise 1.V：计算下面矩阵的行列式（爪型行列式）：

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b & b & \dots & b \\ c & d_1 & & & \\ c & & d_2 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ c & & & & d_n \end{pmatrix}$$

Solution：从第二列开始，将矩阵的第一列分别减去对应列的 c/d_1 倍，从而消去每一行的第一个元素（c），用分量表示为：$a_{1j} \to a_{1j} - a_{kj} \cdot (c/d_{k-1})$，$k$ 从 2 遍历到 $n+1$：

$$\det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} a' & b & b & \cdots & b \\ & d_1 & & & \\ & & d_2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & d_n \end{vmatrix} = a' d_1 d_2 \dots d_n = a' \cdot \prod_{i=1}^{n} d_i$$

其中

$$a' = a - cb\left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \dots + \frac{1}{d_n}\right) = a - cb\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d_i}$$

Exercise 1.VI：证明奇数阶反对称矩阵（$a_{ij} = -a_{ji}, a_{ii} = 0$）的行列式为 0.

Proof：假设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶反对称矩阵（n 为奇数），则 $\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}} = -\boldsymbol{A}$. 两端求行列式，有：

$$\det \boldsymbol{A} = -\det \boldsymbol{A}^{\mathsf{T}} = -\det \boldsymbol{A}$$

因此 $\det \boldsymbol{A} = 0$. □

2 向量空间

2.1 域

首先的首先，我们先引入域：

Definition 2.1.1 (域)：一个域是一个集合（记为 K），辅以两个运算（加法运算和乘法运算 ）：

- $\times : K \times K \to K$（$\times\,(a, b)$ 简记为 $a \times b$ 或 $a \cdot b$ 或 ab）

同时满足以下性质：

- **交换性**：$\forall \alpha, \beta \in K$，有 $\alpha + \beta = \beta + \alpha, \alpha\beta = \beta\alpha$.

- **结合性**：$\forall \alpha,\beta,\lambda \in K$，有 $(\alpha+\beta)+\lambda=\alpha+(\beta+\lambda),(\alpha\beta)\lambda=\alpha(\beta\lambda)$.
- **单位元**：$\exists 1,0\in K$，满足 $\forall \lambda\in K$，有 $\lambda+0=\lambda$，$\lambda 1=\lambda$.
- **加法逆元**：$\forall \alpha\in K$，总 $\exists ! \beta\in K$，使得 $\alpha+\beta=0$.
- **乘法逆元**：$\forall \alpha\in K,\alpha\neq 0$，总 $\exists ! \beta\in K$，使得 $\alpha\beta=1$.
- **分配性质**：$\forall \lambda,\alpha,\beta\in K$，有 $\lambda(\alpha+\beta)=\lambda\alpha+\lambda\beta$.

则称 $(K,+,\times)$ 为域. 当二元运算不重要时，也可直接将 $(K,+,\times)$ 简记为 K.

Remark: 这里的 $+$，$\times$ 均为抽象的运算，不一定是我们熟悉的实数上的"加法"和"乘法". 同时，1 和 0 也不一定是我们所熟悉的实数的"1"和"0"，而只代表 K 中的某两个满足定义的特殊的元素.

上面的定义中的"交换性"，"结合性"，"单位元"，"加法逆元"，"乘法逆元"也可以用抽象代数的说法表示：

- $(K,+)$ 为交换群，且其单位元为 0_K.
- $(K-\{0_K\},\times)$ 为交换群.

我们常见的域的例子有**有理数域** $\mathbb{Q}$，**实数域** $\mathbb{R}$，**复数域** $\mathbb{C}$. 当然还有一些我们不是很常见的域，如有理数域，代数函数域，代数数域，p 进数域等，但在本文中我们只讨论最常见的 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{C}$.

Mark: 本文中默认以黑板粗体来表示域，同时，总是以记号 $\mathbb{F}$ 表示 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$.

$\mathbb{F}$ 中的元素被称为**标量**. 标量通常强调对象是一个数，而不是向量（向量的定义在之后给出）.

2.2 向量空间

Definition 2.2.1 (向量空间): 一个向量空间是给定域 $(K,+,\times)$ 后的一个集合 V，辅以两个运算：

- **向量加法** $\oplus: V\times V\to V$（$\oplus(u,v)$ 简记为 $u\oplus v$，没有歧义时也记作 $u+v$）.
- **标量乘法** $\cdot: K\times V\to V$（$\cdot(a,v)$ 又简记为 $a\cdot v$ 或 av）.

同时满足如下性质：

- **交换性**：$\forall u,v\in V$，有 $u+v=v+u$.
- **结合性**：$\forall u,v,w\in V,a,b\in K$，有 $(u+v)+w=u+(v+w)$ 和 $(ab)v=a(bv)$.
- **加法单位元**：$\exists 0\in V$，满足 $\forall v\in V$，有 $v+0=v$.
- **加法逆元**：$\forall v\in V$，总 $\exists w\in V$，使得 $v+w=0$.
- **乘法单位元**：$\forall v\in V$，有 $1v=v$.
- **分配性质**：$\forall a,b\in K,u,v\in V$，有 $a(u+v)=au+av$ 和 $(a+b)v=av+bv$.

则称 V 是定义在域 K 上的向量空间.

另外，我们做如下定义：

Definition 2.2.2 (实向量空间、复向量空间):
- $\mathbb{R}$ 上的向量空间称为**实向量空间**（记为 $\mathbb{R}^n$）.
- $\mathbb{C}$ 上的向量空间称为**复向量空间**（记为 $\mathbb{C}^n$）.

在定义了向量空间后，我们可以定义向量：

Definition 2.2.3 (向量、点)：向量空间中的元素被称为**向量**或**点**.

2.3 子空间、子空间和与直和

Definition 2.3.1 (子空间)：如果向量空间 V 的子集 U 也是向量空间（采用和 V 相同的加法和标量乘法），则称 U 是 V 的子空间.

下面给出了判断向量空间的子集是否为子空间的最简单的方法：

Theorem 2.3.1 (子空间的条件)：向量空间 V 的子集 U 是 V 的子空间当且仅当 U 满足下面三个条件：
- **加法单位元**：$0 \in U$.
- **加法封闭性**：$\forall u, v \in U$，有 $u + v \in U$.
- **标量乘法封闭性**：$\forall \lambda \in \mathbb{F}, v \in U$，有 $av \in U$.

Remark: $\{0\}$ 是 V 的最小子空间，V 是 V 的最大子空间. 空集不是 V 的子空间，因为向量空间必须包含加法单位元，因此空集不是向量空间，自然不是 V 的子空间.

Mark：子空间之间同样可以进行交和并操作，但需要注意，子空间的并一般而言并不是子空间，因此，我们通常考虑子空间的和，而不考虑子空间的并

Definition 2.3.2 (子空间的和)：设 $U_1, ..., U_n$ 均为 V 的子空间，则 $U_1, ..., U_n$ 的和定义为 $U_1, ..., U_n$ 中元素的所有可能的和所构成的集合，记为 $U_1 + \cdots + U_n$，即：

$$U_1 + \cdots + U_n = \{\boldsymbol{u}_1 + \cdots + \boldsymbol{u}_n : \boldsymbol{u}_1 \in U_1, ..., \boldsymbol{u}_n \in U_n\}$$

Mark：子空间的和是包含这些子空间的最小子空间

Remark: 向量空间中子空间的和常常类比于集合论中的子集的并(但要注意子空间的和和子空间的并是不同的运算，子空间的和仍旧是子空间，但子空间的并一般而言并不是). 给定一个向量空间的两个子空间，包含它们的最小子空间是它们的和；类似地，给定一个集合的两个子集，包含它们的最小子集是它们的并集.

在子空间的和中，有一种特殊情况非常重要，以至于需要起一个单独的名字：直和：

Definition 2.3.3 (直和)：设 $U_1, ..., U_n$ 均为 V 的子空间，若 $U_1 + \cdots + U_n$ 中的每一个元素都可以唯一地表示为 $\boldsymbol{u}_1 + \cdots + \boldsymbol{u}_n$，其中 $\boldsymbol{u}_1 \in U_1, ..., \boldsymbol{u}_n \in U_n$，则我们称 $U_1 + ... + U_n$ 为直和，记为 $U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$，其中符号 $\oplus$ 表明这是一个直和.

Remark：向量空间的直和是向量空间的和的特殊情况，其意味着所有子空间任取一组基底，所有子空间的基底集合能构成子空间的和中的一组基底. 因此对于两个有限维度的子空间，其维度一定满足如下关系：

$$\dim U_1 + \cdots + \dim U_n = \dim(U_1 \oplus \cdots \oplus U_n)$$

而一般的子空间的和仅有如下关系：

$$\dim U_1 + \cdots + \dim U_n \leq \dim(U_1 + \cdots + U_n)$$

当且仅当子空间的和为直和时取等.

Theorem 2.3.2 (直和的条件)：设 $U_1, ..., U_n$ 均为 V 的子空间，则 "$U_1 + \cdots + U_n$ 是直和"当且仅当"0 能表示成 $\boldsymbol{u}_1 + \cdots + \boldsymbol{u}_n$（其中 $\boldsymbol{u}_1 \in U_1, ..., \boldsymbol{u}_n \in U_n$）的唯一方式是每一个 $u_i = 0$".

我们还可以用下面的更简单的方法来验证两个子空间的直和：

Theorem 2.3.3 (两个子空间的直和的条件)：设 U 和 W 都是 V 的子空间，则"$U + W$ 是直和"当且仅当"$U \cap W = \{0\}$".

2.4 向量组与张成空间

向量组，顾名思义，就是一组向量，这里我们要求这一组向量在同一个向量空间（一般而言，这要求向量的"长度"相同）. 在表示向量组时通常并不会使用括号括起来.

将向量组中的向量做标量乘法后相加，即可得到该向量组的一个线性组合，定义如下：

Definition 2.4.1 (线性组合)：V 中的一组向量 $\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_n$ 的线性组合是指形如：

$$a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots a_n\boldsymbol{v}_n$$

的向量，其中 $a_1, ..., a_n \in \mathbb{F}$ 称为系数.

Definition 2.4.2 (线性表出)：V 中的一组向量 $\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_n$，对于 $\boldsymbol{u} \in V$，若存在一组数 $a_1, ..., a_n \in \mathbb{F}$，满足：

$$\boldsymbol{u} = a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n$$

则称 $\boldsymbol{u}$ 可以由向量组 $\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_n$ 线性表出.

Definition 2.4.3 (张成空间)：V 中的一组向量 $\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_n$ 的所有线性组合所构成的集合称为向量组 $\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_n$ 的张成空间，记为 $\operatorname{span}(\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_n)$，即

$$\operatorname{span}(\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_n) = \{a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n : a_1, ..., a_n \in \mathbb{F}\}$$

另外，我们规定空向量组的张成空间定义为 $\{\mathbf{0}\}$.

Theorem 2.4.1：V 中的一组向量的张成空间是包含这组向量的最小子空间.

2.5 线性无关、基与为维数

Definition 2.5.1 (线性相关与线性无关)：V 中的一组向量 $\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_n$ 被称为是线性相关的，若有 $\mathbb{F}$ 中不全为 0 的数 $a_1, ..., a_n$，使得

$$a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}$$

反之则被称为线性无关.

Remark：线性无关意味着若向量组线性组合为 0，则所有的系数都只能为 0. 我们还可以这么表述：线性无关意味着每一个向量都不能由其他向量线性表示得出. 这里需要注意，线性相关并不意味着每一个向量都能由其他的向量线性表示出，只需要有一个向量能由其他向量线性表示得出则这一组向量就是线性相关的. 在 *Definition 2.5.1* 中则意味着向量前的系数 a_i 可以为 0.

现在我们将线性无关和张成这两个概念结合在一起.

Definition 2.5.2 (基)：若 V 中的一个向量组既线性无关又张成 V，则被称为 V 的**基**.

Theorem 2.5.1：在向量空间中，每一个张成组都可以化简成一组基.

2.6 向量组的秩

Definition 2.6.1 (极大线性无关组)：向量组的一个部分被称为极大线性无关组，如果这个部分组本身是线性无关的，但从这个向量其余向量（如果还有的话）中任意添一个进去，得到的新的部分组都线性相关.

Definition 2.6.2 (向量组等价)：如果向量组 $\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_n$ 与向量组 $\boldsymbol{u}_1, ..., \boldsymbol{u}_n$ 可以互相线性表出（即其中一个向量组中的任意一个向量都能由另一个向量组线性表出），则称这两个向量组等价，记作：

$$\{\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_n\} \cong \{\boldsymbol{u}_1, ..., \boldsymbol{u}_n\}$$

不难证明，这种关系具有反身性、对称性、传递性，即是等价关系.

Remark: 对矩阵作初等行变换，变换前后的行向量组等价，但不能保证列向量组等价.

Definition 2.6.3 (向量组的秩): 向量组 $\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_n$ 的极大线性无关组所含向量的个数被称为这个向量组的秩，记作：

$$\operatorname{rank}\{\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_n\}$$

3 矩阵

3.1 线性映射

每当数学家研究一个数学结构时，他们总会关心能够保持这一结构的映射，称为**态射** (Morphism). 在前文中，我们介绍了向量空间这一数学结构，对于向量空间这一结构来说，态射是**线性映射**，其定义如下：

Definition 3.1.1 (线性映射): 从 V 到 W 的线性映射是具有如下性质的函数 $T : V \to W$：

- **加性**：$\forall u, v \in V$，都有 $T(u + v) = Tu + Tv$
- **齐性**：$\forall v \in V$ 和 $\forall \lambda \in \mathbb{F}$，都有 $T(\lambda v) = \lambda T v$

另外，从 V 到 W 的所有线性映射构成的集合记为 $\mathcal{L}(V, W)$.

Remark: T 除了被称为 V 到 W 的线性映射，也被称为线性变换，或者说向量空间中的同态；当 W 和 V 一样时，我们称 T 是 V 上的算子；当 W 是 V 的域 $\mathbb{F}$ 时，我们称 T 是 V 上的线性泛函，也被称为余向量或行向量[1]，或者 1-形式.

对于一个线性映射 $T : V \to W$，若 $v_1, v_2, ..., v_n$ 是 V 上的基，则 T 的线性保证了 $Tv_1, Tv_2, ..., Tv_n$ 的值确定了 T 在 V 上任意向量的值. 这些值可以用 W 上的基 $w_1, w_2, ..., w_m$ 表示，而这些 Tv_n 值在矩阵中得到了有效的记录.

Definition 3.1.2 (线性映射的矩阵): 设 $T \in \mathcal{L}(V, W)$，并且 $v_1, ..., v_n$ 是 V 上的基，$w_1, ..., w_m$ 是 W 上的基. 规定 T **关于这些基**的矩阵为一个 $m \times n$ 矩阵 $\mathcal{M}(T)$，其中矩阵的元素 A_{jk} 满足：

$$Tv_k = A_{1k}w_1 + A_{2k}w_2 + \cdots + A_{mk}w_m = \sum_{i}^{m} A_{ik}w_i$$

如果这些基不是上下文自明的，则采用记号 $\mathcal{M}(T, (v_1, ..., v_n), (w_1, ..., w_m))$

[1]至于为何又可以被称为行向量，在之后的章节中会有所讲解.

Mark：如果 T 是从 n 维向量空间到 m 维向量空间的一个线性映射，则 $\mathcal{M}(T)$ 是一个 $m \times n$ 矩阵.

矩阵中元素 A_{jk} 又有如下一个简单的可视化记忆方法. 我们可以将定义域的基矢 $(v_1, ..., v_n)$ 横写在顶端，并将 T 映射到的那个向量空间的基矢 $(w_1, ..., w_m)$ 竖写在左侧，并按对应的位置写上矩阵的元素：

$$\mathcal{M}(T) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & ... & A_{1i} & ... & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & ... & A_{2i} & ... & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{j1} & A_{j2} & ... & A_{ji} & ... & A_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & ... & A_{mi} & ... & A_{mn} \end{pmatrix}$$

Remark：如果 T 是从 $\mathbb{F}^n$ 到 $\mathbb{F}^m$ 的线性映射，那么默认所考虑的基是标准基（其中第 k 个基向量的第 k 个位置是 1，其余位置是 0）. 如果把 $\mathbb{F}^m$ 中的元素看成是由 m 个数组成的列，则可以将第 k 列看成是线性映射 T 对第 k 个标准基作用的结果.

Example：设 $T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^2, \mathbb{F}^3)$ 定义如下：

$$T(x, y) = (x + 3y, 2x + 5y, 7x + 9y)$$

则 T 关于 $\mathbb{F}^2$ 和 $\mathbb{F}^3$ 的标准基的矩阵为：

$$\mathcal{M}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$$

3.2 矩阵的基本运算

对于一个 m 行 n 列的矩阵，我们称其为 $m \times n$ 矩阵.

矩阵的**加法**和向量的加法一样. 令 $A = (a_{ij})$，$B = (b_{ij})$ 是两个 $m \times n$ 的矩阵，记 $S = A + B$ 且是一个 $m \times n$ 矩阵，记 $S = (s_{ij})$，则 $s_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Remark：只有两个形状相同的矩阵才能相加.

矩阵的**标量乘法**与向量的标量乘法一样. 一个数 $\lambda \in \mathbb{F}$ 乘一个 $m \times n$ 的矩阵 $A = (a_{ij})$ 得到一个 $m \times n$ 的矩阵 $B = (b_{ij})$，其中 $b_{ij} = \lambda a_{ij}$.

矩阵乘法则是一个较为复杂的计算. 一个 $l \times m$ 的矩阵 $A = (a_{ij})$，乘上一个 $m \times n$ 的矩阵 $B = (b_{ij})$，这时的积 $C = (c_{ij})$ 是一个 $l \times n$ 矩阵，用符号表示，即：

$$(l \times m) \cdot (m \times n) = (l \times n)$$

其中矩阵 C 的元素由下式决定：

$$c_{ij} = \sum_{n=1}^{m} a_{in} b_{nj}$$

Mark：对于两个矩阵相乘（如矩阵 AB），当且仅当第一个矩阵的列数等于第二个矩阵的行数时，矩阵乘法才有意义（这里假设矩阵 A 是一个 $l \times m$ 的矩阵，矩阵 B 是一个 $m \times n$ 的矩阵）. 这可以结合矩阵与线性映射的关系来看：对于一个 $m \times n$ 矩阵，其代表者一个从 n 维线性空间到 m 维线性空间的映射. 而两个矩阵相乘等于两个映射的**复合**（对于 AB，其意味着先进行 B 代表的映射再进行 A 代表的映射）. 因此，矩阵 B 将一个 n 维的线性空间映射到 m 维的线性空间，矩阵 A 再将这个 m 维的线性空间映射到 l 维的线性空间. 而两个矩阵的乘积 AB 则显然是一个从 n 维线性空间到 l 维线性空间的映射. 因此是一个 $l \times n$ 的矩阵，同时“”矩阵乘法要求第一个矩阵的列数等于第二个矩阵的行数“这一条件是合理且显然的.

3.3 分块矩阵

3.4 矩阵的秩

3.5 核空间、像空间

3.6 同构与商空间

Definition 3.6.1 (同构)：设 $\mathbb{F}$ 上的线性空间 V 与 V'. 若存在双射 $\sigma : V \to V'$ 且保持线性，即对于 $u, v \in V$，$\lambda \in \mathbb{F}$，有:

$$\sigma(u+v) = \sigma(u) + \sigma(v), \sigma(kv) = k\sigma(v)$$

那么称 σ 是 V 到 V' 的一个同构映射. 此时称 V 与 V' 同构，记为 $V \cong V'$.

Example (对偶空间)：对于向量空间 V 和向量空间 W，我们将从 V 到 W 的所有线性映射所构成的集合记为 $\mathcal{L}(V, W)$. 我们可以在 $\mathcal{L}(V, W)$ 上自然地赋予如下线性结构：$\forall S, T \in \mathcal{L}(V, W)$、$\forall \lambda \in \mathbb{F}$

- $(S+T)(v) := S(v) + T(v)$
- $(\lambda T)(v) := \lambda T(v)$

注意这个空间的基础域和 V、W 是一样的，都是 $\mathbb{F}$.

当 W 是 V 的域 $\mathbb{F}$ 时，即所有的线性映射都是线性泛函（线性泛函中的函数一般用小写的 f 和 g 表示，这或许是因为从初中开始我们就习惯把值域是数的函数关系用小写字母 f 和 g 表示），此时 $\mathcal{L}(V, \mathbb{F})$ 构成的向量空间 $V^{\vee}$ 被称为 V 的**对偶空间**. 并且，不难发现，$V^{\vee}$ 的对偶空间（即对偶空间的对偶空间）就是 V 本身，或者说，V 和 $V^{\vee}$ 是互为对偶的.

不难证明对偶空间 $V^{\vee}$ 和 V 是同构的.

下面我们来看看 $\mathbb{R}^3$ 中的情况，$\mathbb{R}^3$ 中的每一个线性泛函其实就是一个行向量，其作用在任何一个三维向量上就会得到一个实数，这个操作和一个运算非常像：内积运算. 内积运算是两个（列）向量之间的运算，而行向量经过转置后就会变成列向量，从而给出 $\mathbb{R}^3$ 的对偶空间和 R^3 之间的一一映射的关系[2].

[2]显然，这么表述是不严谨的，严谨的表述可以参考 Riesz 定理.

Theorem 3.6.1：域 $\mathbb{F}$ 上两个有限维线性空间同构的充要条件是它们的维度相等.

4　行列式

4.1　行列式的公理化定义

首先我们给出行列式的公理化定义：

Definition 4.1.1 (行列式)：在矩阵空间 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 中存在函数 $\mathcal{D}:\mathbb{F}^{n\times n}\to\mathbb{F}$，且具有如下性质：

- （正规化条件）$\mathcal{D}(\boldsymbol{I})=1$（$\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵）
- （反对称性）$\mathcal{D}(\boldsymbol{A})$ 关于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是反对称的（即交换 $\boldsymbol{A}$ 的任意两行，则函数值变号）
- （多重线性）$\mathcal{D}(\boldsymbol{A})$ 对于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行是线性的

则函数 $\mathcal{D}$ 是唯一确定的，我们称函数 $\mathcal{D}$ 为**行列式**，记为 $\det\boldsymbol{A}$.

其中，函数 $\mathcal{D}(\boldsymbol{A})$ 关于矩阵的各行是线性的指：记 $\boldsymbol{A}_{(i)}$ 表示矩阵的第 i 行，$\boldsymbol{A}^{(j)}$ 表示矩阵的第 j 列. 令 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{D}$ 为三个矩阵，且除去第 k 行外其他矩阵的元素相同. 进一步假设 $\boldsymbol{D}_{(k)}=c_1\boldsymbol{A}_{(k)}+c_2\boldsymbol{B}_{(k)}$，其中 $c_1,c_2\in\mathbb{F}$，则 $\mathcal{D}(\boldsymbol{D})=c_1\mathcal{D}(\boldsymbol{A})+c_2\mathcal{D}(\boldsymbol{B})$.

4.2　行列式的性质

行列式的一个非常重要（也许是最重要）的性质是其与矩阵乘法的相容性：

Theorem 4.2.1 (行列式的乘法性质)：令 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbb{F}^{n\times n}$，则有 $\det(\boldsymbol{AB})=\det\boldsymbol{A}\det\boldsymbol{B}$

Theorem 4.2.2 (行列式的加法性质)：令 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{F}^{n\times n}$，则：

- 若矩阵 $\boldsymbol{A}'$ 是将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行的 λ 倍加到矩阵的第 j 行（$i\neq j$）所得到的矩阵，即 $\boldsymbol{A}'_{(i)}=\boldsymbol{A}_{(i)}+\lambda\boldsymbol{A}_{(j)}$，则 $\det\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}$.
- 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中的某一行为 0，则 $\det\boldsymbol{A}=0$.
- 若矩阵 $\boldsymbol{A}'$是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 将第 i 行乘上 λ 所得到的矩阵，即 $\boldsymbol{A}'_{(i)}=\lambda\boldsymbol{A}_{(i)}$，则 $\det\boldsymbol{A}'=\lambda\det\boldsymbol{A}$.

Corollary 4.2.1：令 $\boldsymbol{P}$ 为第一类初等矩阵（即将一行的倍数加到另一行所代表的矩阵），$\boldsymbol{A}$ 为任意的矩阵，则 $\det(\boldsymbol{PA})=\det\boldsymbol{A}$. 这告诉我们，对一个矩阵做行约简后其行列式的值不变.

4.3　行列式的逆序数定义

在前文，我们通过行列式的公理化定义得到了行列式的一些性质，但我们仍未给出行列式的一个具体的计算表达式。下面我们将给出行列式的一个更为常见的定义：逆序数定义.

虽然逆序数的定义看起来很抽象且不利于理解，且一般我们也不使用逆序数的定义（即使是计算机也不适用逆序数的方法来计算，其总的时间复杂度较高），但逆序数的定义是行列式的一个直接定义，在一些有关行列式的定性计算时容易看清行列式的大概结构。

首先，我们逐步引入逆序数的概念：

Definition 4.3.1 (排列)：$1, 2, 3, \cdots, n$ 的一个全排列为一个 n 元排列.

例如：$1, 2, 3$ 形成的 3 元排列有 $123, 132, 213, 231, 321, 312$ 这 6 种，更进一步地，我们可以得到，n 元排列的总数为 $n!$.

Definition 4.3.2 (顺序和逆序)：**顺序**的定义为数字从小到大排列. 具体而言，对于 $a_1 a_2 \cdots a_n$ 这一排列，若取 $a_i, a_j (i < j)$，有 $a_i < a_j$，则称 $\left(a_i, a_j\right)$ 这一对数构成了一个顺序（对）. 同理，**逆序**的定义为数字从大到小的排列. 对于 $a_1 a_2 \cdots a_n$ 这一排列，若取 $a_i, a_j (i > j)$，有 $a_i < a_j$，则称 $\left(a_i, a_j\right)$ 这一对数构成了一个逆序（对）.

Definition 4.3.3 (逆序数)：在一个排列中，逆序对的总数称为这个排列的**逆序数**，记作 τ. 其中，记逆序数为偶数的排列为**偶排列**，记逆序数为奇数的排列为**奇排列**.

例如，排列 2413 的所有的逆序对为 $21, 43, 41, 31$，因此，此排列的逆序数为 4，记为 $\tau(2413)$.

自然排列 $12 \cdots n$ 的逆序数为 0，其是一个偶排列.

Definition 4.3.4 (对换)：把一个排列中的某一对数互换位置，其余数不动，此操作被称为一个**对换**.

Mark：对排列进行一次对换会改变排列的奇偶性.

在引入了逆序数后，我们终于可以给出行列式的逆序数定义：

Theorem 4.3.1 (行列式的逆序数定义)：n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式定义为：

$$
\begin{aligned}
\det(\boldsymbol{A}) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \\
&= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} \prod_{i=1}^{n} a_{ij_i}
\end{aligned}
$$

这里其中求和号 $\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对所有的 n 元排列求和，也就是列指标构成的排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 遍历 n 元排列. 换句话说，n 阶矩阵的行列式是一个 $n!$ 项和，其中每一项由不同行、不同列的 n 个元素的乘积再乘上一个符号项构成. 当这 n 个元素按行指标自然排列排好位置时，若列指标所构成的排列为偶排列，则符号项为正号；若列指标所构成的排列为奇排列时，则符号项为负号.

4.4 行列式的唯一性

现在我们来证明我们常见的行列式逆序数定义和行列式的公理化定义等价. 要证明等价，我们将其分成两步：首先我们先证明满足行列式的公理化定义的行列式函数确实是唯一的，然后我们再证明行列式逆序数定义是满足行列式的公理化定义的，从而证明这两个定义等价.

Theorem 4.4.1 (行列式的唯一性)：$\mathbb{F}^{n\times n}$ 上的行列式函数 $\mathcal{D}$ 是唯一的.

Proof: 设 f 和 g 是 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 上的任意两个行列式函数，则我们需要证明，对于在定义域内的 $\forall \boldsymbol{A} \in \mathbb{F}^{n\times n}$，总有 $f(\boldsymbol{A}) = g(\boldsymbol{A})$. 现在我们假设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{F}^{n\times n}$，则：

- 如果[3] $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) < n$，则根据行列式的性质，有 $\mathcal{D}(\boldsymbol{A}) = 0$，即 $f(\boldsymbol{A}) = g(\boldsymbol{A})$.
- 如果 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = n$，则 $\boldsymbol{A}$ 可以由单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 经有限次初等行变换而得到. 同时，行列式的定义给出了每个初等变换后行列式的变化（Theorem 4.2.1 和 Theorem 4.2.2）. 又因为行列式函数要求 $\mathcal{D}(\boldsymbol{I}) = 1$，因此 $f(\boldsymbol{A}) = g(\boldsymbol{A})$.

□

Remark: 这里我们并没有假设行列式函数 $\mathcal{D}$ 的定义域是整个 $\mathbb{F}^{n\times n}$. 换句话说，对于任意的 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{F}^{n\times n}$，我们并不能保证其肯定会有一个函数值 $\mathcal{D}(\boldsymbol{A})$，但我们能证明，无论 $\mathcal{D}$ 是如何构造出来的，其 $\mathcal{D}(\boldsymbol{A})$ 一定是同一个值. 因此，对于任意的行列式定义，只要我们能证明其满足行列式的公理化定理，那么我们就能证明此行列式定义和其他行列式定义的等价性.

4.5 行列式的几何意义

行列式有如下常见的几何意义：

- 矩阵的行列式表示矩阵对应的线性变换对空间的伸缩率.
- 矩阵的行列式表示列向量张成的平行多面体的有向体积.

[3] 这里的 rank 是矩阵的**秩**，在之后的章节中有所定义.

在这种几何解释下，行列式的一些性质是很直观的. 如行列式的乘法性质（Theorem 4.2.1）. 矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 对应的线性变换表示先以 $\boldsymbol{B}$ 作用，再以 $\boldsymbol{A}$ 作用. 显然对应的总的对空间的伸缩率是两个变换对空间的伸缩率的乘积，即 $\det(\boldsymbol{AB}) = \det \boldsymbol{A} \det \boldsymbol{B}$.

另外，我们还可以很显然地得到下面的定理：

Theorem 4.5.1 (Hademard 不等式)：对于 n 阶方阵 $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n]$，有

$$|\det \boldsymbol{A}| \le \|\boldsymbol{\alpha}_1\|\|\boldsymbol{\alpha}_2\|\cdots\|\boldsymbol{\alpha}_n\|$$

成立.

Proof: 不等式的左边表示向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 互有夹角构成的平行多面体的体积. 不等式的右边表示这些向量在模长不变的情况下两两正交构成的平行多面体的体积. 后者显然大于前者，且当且仅当原向量组两两正交时不等式取等. □

4.6 代数余子式

定义余子式和代数余子式如下：

Definition 4.6.1 (余子式和代数余子式)：n 阶行列式 $\det \boldsymbol{A}$ 中，划去第 i 行和第 j 列，剩下的元素按原来的次序组成的 $n-1$ 阶矩阵的行列式成为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 (i,j) 元的余子式，记作 M_{ij}. 更进一步地，令 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 (i,j) 元的代数余子式.

借助代数余子式，我们可以给出行列式的按行或按列展开，即 Laplace 定理。

Theorem 4.6.1 (Laplace 定理)：对于 n 阶行列式 $\det \boldsymbol{A}$，有：

$$\det \boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

其中，前者被称为行列式按行展开，后者被称为行列式按列展开。

同时，借助代数余子式，我们也可以给出行列式的另一个定义：

Definition 4.6.2 (行列式的递归定义)：设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 阶矩阵，用 $\boldsymbol{A}_{ij}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中删去第 i 行和第 j 列得到的 $(n-1)$ 阶子矩阵，则：

$$\det \boldsymbol{A} = \sum_{i} (-1)^{i+1} a_{ij} \boldsymbol{A}_{ij}$$

其中，定义当 $n=1$ 时的矩阵的行列式等于其唯一的元素本身. 如矩阵 $\boldsymbol{A} = (a)$ 的行列式为 ：$\det \boldsymbol{A} = a$.

借助代数余子式，我们可以快速求解下类行列式的值：

Exercise 4.I：设：

$$
\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ =5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{pmatrix}
$$

记 $\det \boldsymbol{A}$ 的代数 (i,j) 元的代数余子式为 A_{ij}，求：

$$
A_{31}+3A_{32}-2A_{33}+2A_{34}
$$

Solution：这里我们可以使用行列式的展开来化简此计算，具体而言，原式相当于用 $1,3,-2,2$ 替换矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第三行的元素后所得的行列式，即：

$$
A_{31}+3A_{32}-2A_{33}+2A_{34}=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}=24
$$

4.7 Cramer 法则

对于数域 $\mathbb{F}$ 上 n 个方程所组成的 n 元线性方程组：

$$
\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}
$$

记其系数矩阵为 $\boldsymbol{A}$，增广矩阵为 $\tilde{\boldsymbol{A}}$，其中：

$$
\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},\quad \tilde{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}
$$

Theorem 4.7.1 (Cramer 法则)：方程组有唯一确定的解的充要条件是 $|\boldsymbol{A}|=0$. 定义 $\boldsymbol{B}_j$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 列替换为 $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathsf{T}}$ 后得到的矩阵. 则此时解为：

$$
\boldsymbol{x}=\left(\frac{|\boldsymbol{B}_1|}{|\boldsymbol{A}|},\frac{|\boldsymbol{B}_2|}{|\boldsymbol{A}|},\cdots,\frac{|\boldsymbol{B}_n|}{|\boldsymbol{A}|}\right)^{\mathsf{T}}
$$

5 笔记

此章节记录一些学习时的笔记内容，相比于后文的“疯言疯语”更严谨准确一些.

5.1 分块矩阵初等变换

Definition 5.1.1 (分块矩阵初等变换)：类比于矩阵的初等变换，以下三个变换被称为**分块矩阵的初等变换**：

- 交换分块矩阵的两行（列）

- 某一行（列）左乘（右乘）**可逆**矩阵
- 某一行（列）左乘（右乘）矩阵加到另一行（列）

其中，上述定义中针对行的操作即为行变换，针对列的操作（括号内）即为列变换.

Remark: 左行右列!

Remark: 注意: 分块矩阵的初等变换中某一行(列)乘上一个矩阵要求这个矩阵是可逆矩阵, 而对于某一行(列)加上另一行乘上一个矩阵则对此矩阵没有要求. 即对于 $r_n \to \boldsymbol{A}r_n$ ($c_n \to c_n\boldsymbol{A}$), 要求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 但对于 $r_n \to r_n + \boldsymbol{A}r_m$ ($c_n \to c_n + c_m\boldsymbol{A}$), 则对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的可逆性没有要求. 具体原因见下文.

类似于矩阵的每一个初等变换对应一个初等矩阵，分块矩阵的每一个初等变换同样对应一个初等矩阵（用分块矩阵的形式写出）.

交换分块矩阵的两行（列）:

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & \\ & & \boldsymbol{I} & & & & & & & & \\ & & & \boldsymbol{O} & & & & \boldsymbol{I} & & & \\ & & & & \boldsymbol{I} & & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & & \boldsymbol{I} & & & & \\ & & & \boldsymbol{I} & & & & \boldsymbol{O} & & & \\ & & & & & & & & \boldsymbol{I} & & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & \boldsymbol{I} \end{pmatrix}$$

显然，上述矩阵 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{P}) = n \times m = mn$（假设每一个块都是 $n \times n$ 矩阵，对角线上一共有 m 个，即矩阵 P 是 $mn \times mn$ 矩阵，后文同理）是满秩的，因此是可逆的，故一定是一般的初等矩阵的乘积.

某一行（列）左乘（右乘）可逆矩阵:

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \boldsymbol{I} & & & & \\ & & & \boldsymbol{A} & & & \\ & & & & \boldsymbol{I} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \boldsymbol{I} \end{pmatrix}$$

此时，上述矩阵 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{P}) = n(m-1) + \operatorname{rank}(\boldsymbol{A})$，要使得 $\boldsymbol{P}$ 为一般初等矩阵的乘积，则 $\boldsymbol{P}$ 可逆，因此 $\boldsymbol{P}$ 为满秩矩阵，即 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{P}) = mn$，即 $\operatorname{rank}(A) = n$，即 $\boldsymbol{A}$ 为满秩矩阵，即 $\boldsymbol{A}$ 可逆. 因此，对于分块矩阵的初等变换中某一行（列）左乘（右乘）一个矩阵，要求此矩阵可逆.

某一行（列）加上另一行（列）左乘（右乘）一个矩阵:

$$
\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix}
\boldsymbol{I} & & & & & & \\
& \ddots & & & & & \\
& & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{A} & & & \\
& & & \ddots & & & \\
& & & & \boldsymbol{I} & & \\
& & & & & \ddots & \\
& & & & & & \boldsymbol{I}
\end{pmatrix}
$$

上述矩阵的可逆性可通过行列式来说明[4]：矩阵 $\boldsymbol{P}$ 可以看成是一个上三角矩阵，根据分块矩阵的行列式计算规则，有 $\det(\boldsymbol{P}) = m\det(I) = mn \neq 0$，因此矩阵 $\boldsymbol{P}$ 是一个可逆矩阵，可以表示为一般初等变换乘积的组合.

6 疯言疯语

本章节的内容都是笔者本人的一些有意思的想法或者看见的一些有意思的想法的摘录，并不能保证其严谨性和准确性.

6.1 指标法

"指标法"原本是矢量分析中的方法技巧，但也可以在线性代数中使用（实际上线性代数中并无指标法一说，只是借用了矢量分析中的名称），实际上，所谓的"指标法"只是张量分析中的指标运算中简化后的结果，线性代数中的矩阵计算本身可以看成是某种二阶张量[5]，自然可以运用张量分析中的指标运算.

"指标法"有如下规则：

- 对于一个矩阵，其第一个指标表示行，第二个指标表示列
- 在同一项内，一个指标最多只能出现两次，并且此时指标的字母可以任意替换（需要成对替换）
- 在同一项内，若一个指标出现两次，则表示遍历其取值范围求和（Einstein 求和约定[6]）
- 不同项相加减需要满足除去出现两次的指标外剩余的指标相同
- 等号两侧需要满足除去出现两次的指标外剩余的指标相同

我们定义一些符号：

Definition 6.1.1 (Kronecker 符号):

$$
\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases}
$$

对于两个矩阵 $\boldsymbol{A} = A_{ij}$ 和 $\boldsymbol{B} = B_{kl}$，两个矩阵相乘就是直接相乘再乘上一个 Kronecker 符号（Kronecker 符号决定了矩阵相乘的顺序）

$$
\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{C} = C_{il} = \delta_{jk} A_{ij} B_{kl} = A_{ij} B_{jk}
$$

[4]通过行初等变换计算秩来说明感觉有点循环论证……

[5]当然，张量需要满足一些条件，而不是任何一个矩阵都是张量。但在这里我们不考虑它们之间的区别.

[6]在一般的课程中并不会使用这个求和约定，而是会把求和符号一并写出.